МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Конспект лекций

по дисциплине «Математические модели в теории управления»

ТЕМА 1 ПОНЯТИЕ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. **С**одержание понятия «управление»
2. Содержание понятия «теория управления» и ее основные категории
3. Структура теории управления
4. Взаимосвязь математических моделей и методики принятия управленческих решений
5. Понятие математической модели принятия решений

1. Содержание понятия «управление»

Любое наблюдение за деятельностью управленца показывает, что необходимо различать структурно-содержательный и процессуально-содержательный аспект управления.

Основа всякого управления – это необходимость планирования деятельности на основе прогнозирования, ее организация и контроль исполнения решений. Но это еще не все управление. Необходимо мотивировать деятельность людей и ее регулировать, так как не все процессы одинаково управляемы. Для поддержания деятельности в определенном режиме необходимо исследовать функционирование, для чего имеется такой вид управленческих функций, как координация.

Так описывается структурно-содержательный аспект управления, представленный для наглядности на схеме 1.

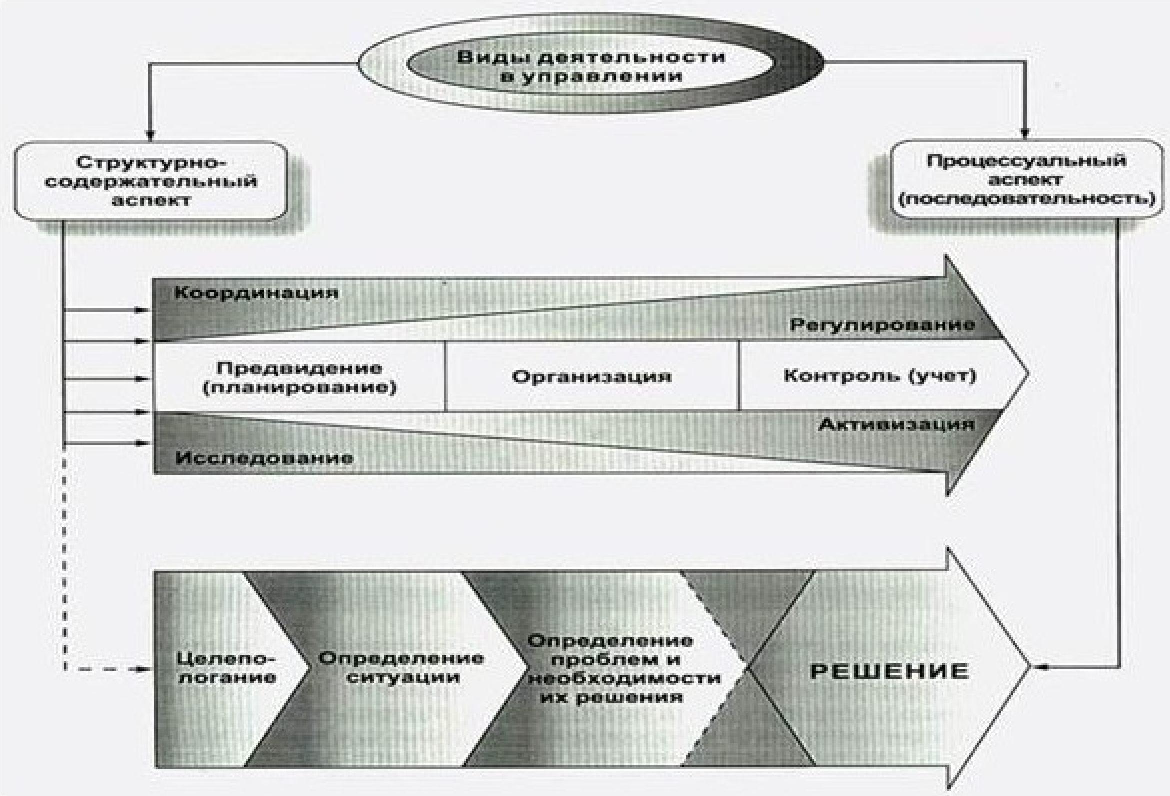


Рисунок 1 – Виды деятельности в управлении

Таким образом, структурно-содержательный аспект управления – это реализация его основных функций, которые, однако, не отражают самого процесса управления. Функция управления – это объективно обособленный вид деятельности человека, являющийся содержательным компонентом процесса управления.

Процесс управления – осуществляемая во времени деятельность объединенных в определенную структуру людей, направленная на достижение поставленной цели.

Процесс управления начинается с целеполагания, то есть с определения того, чего мы хотим достичь. Затем необходимо оценить ситуацию относительно поставленной цели, то есть описать то, что мы имеем в настоящее время для достижения цели.

Цель и конкретная ситуация всегда не совпадают, не адекватны, отсюда вытекает понятие «проблемы», то есть того противоречия, которое необходимо разрешить принятием управленческого решения. Реализованное управленческое решение переводит систему управления в новое состояние.

Итак, содержание понятия «управление» раскрывается через его структурно-содержательный и процессуально-содержательный аспект. Рассмотрим, что же содержит понятие «теория управления», каковы ее основные категории.

2. Содержание понятия «теория управления» и ее основные категории

Клод Гельвеций, французский философ, сказал: «Всякий, изучающий историю народных бедствий, может убедиться, что большую часть несчастий на земле приносит невежество». Любой современный специалист в сфере управления должен владеть и теорией, и практикой, и искусством управления.

Теория управления – древняя наука, берущая начало не с времен американских инженеров XIX века, а с произведений античных мыслителей, рассуждавших об искусстве управления людьми в разных сферах – политике, торговле, военных действиях, дипломатии. Управление должно иметь свою теорию, ибо никакой опыт отдельного руководителя или даже управленческой команды не может учесть всего многообразия управленческих ситуаций.

Теория управления – это совокупность знаний о законах и закономерностях, методологии и методах осуществления управленческой деятельности. Наука управления создает, систематизирует и распространяет знания о том, как именно осуществлять управленческую деятельность с опорой на знание трех базовых наук – психологии, экономики и права.

Управление – особый вид отношений между людьми, который заключается в том, что один человек хочет добиться от другого того, чего этот другой сам по себе бы не делал. Поэтому понятием «управление» обозначается одна из самых неопределенных и размытых категорий. Мы управляем самолетом, своим свободным временем, коллективом. Возникает вопрос, что есть управление по своему характеру – процесс или результат, энергия или информация, и как можно получать больше, чем отдавать? Если управление – древнейшее искусство и новейшая наука, то каковы же ее основные категории?

Специалисты в области управления сходятся во мнении, что управление основывается на собственных принципах и законах и содержит специфические для него категории.

Приняв за основу определение управления как целенаправленного воздействия, можно считать его ***основными категориями:***

— объект и субъект управления,
— система,
— механизм,
— процесс управления;
— метод управления.

Субъект управления – управляющая подсистема, воздействующая на другие элементы системы управления. Это источник воздействия, которым может выступать тот, кто имеет на это полномочия: городская дума, директор завода, менеджер банка и др. Субъект управления как звено, часть социально-экономической системы оказывает воздействие на всю систему в целом.

Объект управления – управляемая подсистема, воспринимающая управленческие воздействия от управляющей подсистемы (как акт согласования деятельности людей). Объектами управления могут быть территориальные общности людей, отрасли, виды ресурсов, группы людей и отдельные личности и т. д.

Соотношение субъекта и объекта управления

Так как главный элемент социально-экономической системы – человек, то последний может выступать и субъектом, и объектом управления.

Каждый член общества управляет его развитием через избирательную систему, в то же время именно на человека направляется управляющее воздействие. И человек, и организация реагируют на управляющие воздействия не пассивно, а с учетом своих интересов. Человек может принять управленческое воздействие, следовать ему, а может и не принять, и от этого будет зависеть эффективность всей системы управления в целом.

Система управления – совокупность функций и полномочий, необходимых для осуществления управленческого воздействия. Систему управления можно представить как совокупность звеньев, осуществляющих управление, а также связей между ними. Система управления включает в себя и средства осуществления управленческих воздействий, такие как интересы, ценности, мотивы, установки, стимулы.

Методы управления – это способы выполнения различных функций для осуществления воздействий, различающиеся характером исполнения. Метод управления диктует конкретная ситуация и характер решаемой проблемы.

Механизм управления – это совокупность средств и методов воздействия на деятельность людей, коллективов. Механизм – это сцепление различных рычагов, определяющих возможность движения. Рычаги бывают личностные, экономические, психологические, социальные и т.д. Особенность механизма управления состоит в возможности усиливать или ослаблять влияние средств управления, выбирать средства воздействия (схема 3).

Процесс управления, как уже отмечалось, это последовательность действий, из которых формируется управленческое воздействие. Он характеризует процессуально-содержательную сторону управления.

Так, понятие системы управления характеризует статику управления, понятие процесса управления – его динамику, понятие механизма – способ организации управления.

Процесс управления не может быть осуществлен любым механизмом управления. Механизм управления не может реализовать любой процесс управления. Чтобы эффективно управлять, надо знать основные категории теории управления, ибо управление – это потребность, которая реализуется сознательно.

Предметом теории управления являются управленческие отношения, в которых одновременно проявляются экономические, социальные и политические интересы, а также тенденции развития практики управления.

3. Структура теории управления

Структура любой науки обусловлена задачей изучения различных сторон одного и того же объекта. Каждая наука имеет свою теорию, каждая научная теория имеет свой предмет.

Для определения структуры теории управления рассмотрим принципиальный процесс формирования научной теории.

Циклический процесс формирования научной теории имеет следующие этапы:

1. Наблюдение за происходящими процессами, за данными предметной области науки и их анализ.

2. Формализация, систематизация, классификация наблюдаемого, составление типологии.

3. Разработка научных и прикладных основ для выполнения анализа и синтеза.

4. Обобщение данных и создание теоретических основ науки: формулирование принципов, описание закономерностей и зависимостей.

5. Создание методологии исследования процессов, научной теории.

6. Накопление статистических данных и корректировка методологии.

ЭТАП 1 — История развития науки

Развитие теории управления начинается с:

- изучения возникновения, становления, т.е. генезиса управления,
- изучения исторических тенденций развития науки управления и эволюции школ научного управления.

ЭТАП 2 - Формирование понятийного аппарата и соответствующих правил и рекомендаций для практической деятельности.

ЭТАП 3 - Формирование структуры систем управления, организация и методы управления.

Эффективность управления зависит, прежде всего, от того, насколько структура систем управления, организация и методы управления соответствуют объективным экономическим законам. Знание законов и закономерностей позволяет выработать методы и стили управления.

ЭТАП 4 - Формирование методики разработки управленческих решений

Эффективность зависит и от методики разработки управленческих решений, и от логических подходов в реализации всех функций управления.

ЭТАП 5 - Выработка критериев и методов оценивания эффективности

Перечень средств и методов воздействия на поведение людей в организациях характеризует основы механизма управления , выработка критериев и методов оценивания эффективности управления производится на последнем этапе.

Таким образом, теория управления – это комплекс теоретических положений, позволяющих дать описание и объяснение объективных явлений управления; это совокупность категорий, раскрывающих сущность, содержание и специфику управления. Теория управления способствует созданию эффективного инструментария управленческой деятельности.

4. Взаимосвязь математических моделей и методики принятия управленческих решений

Математические модели принятия решений можно разбить на два больших класса:

— оптимизационные - уходят своими корнями в классический математический анализ и имеют весьма "почтенный"возраст.

— теоретико-игровые начали исследоваться лишь в последние десятилетия — после выхода в 1944 году фундаментальной монографии "Теория игр и экономическое поведение".

Этим названием авторы (один из которых — Джон фон Нейман — был выдающимся математиком, а другой — Оскар Моргенштерн — известным экономистом), хотели подчеркнуть взаимосвязь между экономикой и теорией игр. Однако только в наши дни глубина проникновения теории игр в экономику была оценена в полной мере. Наиболее концентрированным выражением этого явилось присуждение Нобелевской премии 1994 года по экономике трем профессиональным математикам за их исследования по теории игр. Механизмы функционирования рынка, конкуренции, возникновения или краха монополий, а также способы принятия ими решений в условиях конкурентной борьбы, то есть механизмы игры монополий, действующие в экономической реальности, — не могут быть исследованы и поняты без теории игр.

Теоретический материал данной дисциплины базируется на математических курсах по:

— исследованию операций,

— теории игр,

— теории принятия решений

— и включает в себя задачи принятия решений в условиях определенности, риска, неопределенности, а также в теоретико-игровых условиях.

В соответствии со сложившимся в современной науке системным подходом, экономику любого государства (или региона) можно рассматривать как большую систему, элементами которой являются производители и потребители разнообразных товаров и услуг. По способу координации экономической деятельности экономические системы подразделяются на:

— централизованные (административно-командные) и

— децентрализованные (рыночные).

Характерной особенностью административно-командной системы является то, что в ней экономические решения принимаются единым управляющим органом (государством) и передаются субъектам экономики в форме распоряжений, обязательных к исполнению. При административном управлении экономикой управляющий орган должен располагать чрезвычайно большим количеством информации, касающейся потребностей населения, имеющихся производственных мощностей, запасов товара и сырья, распределения рабочей силы и т.п. Поэтому необходима многочисленная (и весьма дорогостоящая) армия чиновников — государственная бюрократия, которая занимается сбором информации, ее обработкой, составлением на этой основе хозяйственных планов, их согласованием, корректировкой, а также контролем за их выполнением.

Децентрализованная экономика основана на суверенитете субъектов экономики. Скажем, применительно к производителям (фирмам) это означает, прежде всего, наличие свободы в принятии экономических решений: что, в каких количествах и какого качества производить из имеющихся ресурсов, а также — кому и по каким ценам продавать произ- веденную продукцию. Суверенитет потребителя есть право принимать решения, связанные с распоряжением принадлежащими ему ресурсами. При этом взаимная координация планов производителей и потребителей осуществляется с помощью обмена произведенными товарами на рынке, который происходит по ценам, устанавливаемым свободно в зависимости от соотношения спроса и предложения. Как известно, экономическая деятельность отдельных субъектов экономики (индивидуумов, домохозяйств, фирм, владельцев первичных ресурсов и т.п.) изучается в том разделе экономической теории, который принято называть микроэкономикой. При этом деятельность субъектов экономики, рассматриваемая в рамках микроэкономической системы, характеризуется большой зависимостью от действий других субъектов. Скажем, если фирма принимает определенное решение, связанное с произ- водством той или иной продукции или с продажей некоторого товара, то окончательный результат (например, прибыль фирмы) будет зависеть не только от принятого ею решения, но и от множества других факторов: решений, принятых другими фирмами, поведения покупателей, действий законодательных органов, курса валют и т.п. Поэтому решение, кото- рое принимается фирмой, будет решением в условиях неопределенности. Эта неопределенность создается как за счет действий других субъектов экономики, преследующих собственные интересы, так и за счет неполноты имеющейся у фирмы информации о сложившейся экономической обстановке.

Основной метод исследования, который использует экономическая теория, — моделирование экономических процессов и явлений. Предметом изучения данного курса являются математические модели поведения субъектов экономики в рамках микроэкономической системы. При этом направленность анализа рассматриваемых здесь математических моделей носит нормативный характер и состоит в том, чтобы дать ответ на вопрос типа: какие действия следует предпринять, чтобы добиться наилучших (в определенном смысле) результатов? Таким образом, содержание данного курса может быть охарактеризовано как построение математических моделей микроэкономики и их исследование в нормативном аспекте.

Децентрализованная экономика основана на суверенитете субъектов экономики. Скажем, применительно к производителям (фирмам) это означает, прежде всего, наличие свободы в принятии экономических решений: что, в каких количествах и какого качества производить из имеющихся ресурсов, а также — кому и по каким ценам продавать произ- веденную продукцию. Суверенитет потребителя есть право принимать решения, связанные с распоряжением принадлежащими ему ресурсами. При этом взаимная координация планов производителей и потребителей осуществляется с помощью обмена произведенными товарами на рынке, который происходит по ценам, устанавливаемым свободно в зависимости от соотношения спроса и предложения. Как известно, экономическая деятельность отдельных субъектов экономики (индивидуумов, домохозяйств, фирм, владельцев первичных ресурсов и т.п.) изучается в том разделе экономической теории, который принято называть микроэкономикой. При этом деятельность субъектов экономики, рассматриваемая в рамках микроэкономической системы, характеризуется большой зависимостью от действий других субъектов. Скажем, если фирма принимает определенное решение, связанное с произ- водством той или иной продукции или с продажей некоторого товара, то окончательный результат (например, прибыль фирмы) будет зависеть не только от принятого ею решения, но и от множества других факторов: решений, принятых другими фирмами, поведения покупателей, действий законодательных органов, курса валют и т.п. Поэтому решение, кото- рое принимается фирмой, будет решением в условиях неопределенности.

Эта неопределенность создается как за счет действий других субъектов экономики, преследующих собственные интересы, так и за счет неполноты имеющейся у фирмы информации о сложившейся экономической обстановке. Основной метод исследования, который использует экономическая теория, — моделирование экономических процессов и явлений. Предметом изучения данного курса являются математические модели поведения субъектов экономики в рамках микроэкономической системы. При этом направленность анализа рассматриваемых здесь математических моде- лей носит нормативный характер и состоит в том, чтобы дать ответ на вопрос типа: какие действия следует предпринять, чтобы добиться наилучших (в определенном смысле) результатов? Таким образом, со- держание данного курса может быть охарактеризовано как построение математических моделей микроэкономики и их исследование в нормативном аспекте.

Наиболее общий подход к описанию задач принятия решений формулируется "на языке систем". Приведем в этом пункте системное описание задач принятия решений (ЗПР). Пусть имется некоторая система, в которой выделена управляемая подсистема (объект управления), управляющая подсистема и среда. Управляющая подсистема может воздействовать на объект управления с помощью альтернативных управляющих воздействий (рис.1.1.).

Состояние объекта управления определяется двумя факторами:

1) выбранным управляющим воздействием со стороны управляющей подсистемы и

2) состоянием среды.

Принципиальным является следующее обстоятельство: управляющая подсистема не может воздействовать на среду и, более того, она, как правило, не имеет полной информации о наличном состоянии среды. Управляющая подсистема является целенаправленой, причем цель управляющей подсистемы состоит в том, чтобы перевести объект управления в наиболее предпочтительное для себя состояние (или в некоторое под- множество предпочтительных состояний). Для достижения этой цели 8 управляющая подсистема может использовать любое находящееся в ее распоряжении управляющее воздействие. Выбор управляющей подситемой конкретного управляющего воздействия (выбор допустимой альтернативы) называется принятием решения. Принятие решения является центральным моментом всякого управления. При принятии решения основной задачей является нахождение оптимального решения. На содержательном уровне оптимальное решение может быть определено как наилучшее в следующем смысле: оно в наибольшей степени соответствует цели управляющей подсистемы в рамках имеющейся у ней информации о состоянии среды.

5. Понятие математической модели принятия решений

Математическая модель принятия решения представляет собой формализацию той схемы, которая приведена в системном описании ЗПР.

Для построения математической модели принятия решения необходимо:

во-первых, задать следующие три множества:

X — множество допустимых альтернатив,

Y — множество возможных состояний среды,

A — множество возможных исходов.

(Всегда предполагается, что множество X содержит не менее двух альтернатив — иначе надобность в принятии решения отпадает.)

В системном описании ЗПР альтернативы интерпретируются как управляющие воздействия, а исходы — как состояния управляемой подсистемы. Так как состояние управляемой подсистемы полностью определяется выбором управляющего воздействия и состоянием среды, то каждой паре

(x, y), где $x \in X$

$y \in Y$, соответствует определенный исход $a \in A$.

Другими словами, существует функция $F : X \times Y \rightarrow A$, которая называется функцией реализации.

Функция реализации каждой паре вида (альтернатива, состояние среды) ставит в соответствие определяемый ею исход.

В конкретных задачах принятия решения элементы множества X называются также: альтернативы, стратегии, варианты, действия, решения, планы и т.п.

Набор объектов $< X, Y, A, F >$ составляет реализационную структуру задачи принятия решения.

Реализационная структура отражает связь между выбираемыми альтернативами и исходами; в общем случае эта связь не является детерминированной (однозначной): появление того или иного конкретного исхода зависит не только от выбранной альтернативы, но и от наличного состояния среды. Таким образом, здесь имеется, как принято говорить, неопределенность стратегического типа; эта неопределенность создается за счет воздействия среды на объект управления. В зависимости от информации, которую имеет при принятии решения управляющая подсистема относительно состояния среды, различают несколько основных типов задач принятия решения.

1. Принятие решения в условиях определенности характеризуется тем, что состояние среды является фиксированным (неизменным), причем управляющая система "знает в каком состоянии находится среда.

2. Говорят, что принятие решения происходит в условиях риска, если управляющая подсистема имеет информацию стохастического характера о

поведении среды (например, ей известно распределение вероятностей на множестве состояний среды).

3. Если никакой дополнительной информации (кроме знания самого множества возможных состояний среды), управляющая подсистема не имеет, то говорят, что принятие решения происходит в условиях неопределенности.

4. Принятие решения происходит в теоретико-игровых условиях, если среду можно трактовать как одну или несколько целенаправленных управляющих подсистем. В этом случае математическая модель принятия решения называется теоретико-игровой моделью (короче — игрой).

Перечислим основные задачи, решаемые в рамках дисциплины, и соотнесем их с соответствующими теоретических разделами математики:

№	Тип задачи	Раздел математики
1	Задача об оптимальном размере закупаемой партии товара	экстремум функции одной переменной
2	Задача максимизации производственной функции	оптимизация при наличии ограничений
3	Распределение заказа между двумя фирмами	условный экстремум функции
4	Задача производственного планирования	линейное программирование
5	Задача о перевозках	линейное программирование
6	Выбор места работы	многокритериальная оптимизация — дискретный случай
7	Оптимизация производственного процесса	многокритериальная оптимизация — непрерывный случай
8	Сравнение объектов по предпочтительности	многокритериальная оптимизация со сравнимыми критериями
9	Исследование потребительских предпочтений	многокритериальная оптимизация при заданном локальном коэффициенте замещения
10	Выбор проекта электростанции	принятие решения в условиях неопределенности
11	Сравнение качества обслуживания станций скорой помощи	принятие решения в условиях риска по критерию ожидаемой полезности
12	Задача об оптимальном портфеле	принятие решения в условиях риска — непрерывный случай
13	Бурение нефтяной скважины	принятие решения в условиях риска с возможностью проведения эксперимента
14	Профилактика нежелательного события	решение матричной игры в чистых стратегиях
15	Выбор момента поступления товара на	решение матричной игры в смешанных

	рынок в условиях антагонистической конкуренции	стратегиях
16	Планирование посева в неопределенных погодных условиях	графоаналитический метод нахождения решения матричной игры
17	Инспекция предприятий торговли	решение матричной игры в смешанных стратегиях
18	Задача распределения ресурсов	ситуации равновесия в игре общего вида
19	Борьба за рынки сбыта	ситуации равновесия в биматричной игре
20	Оптимальное распределение прибыли	кооперативное решение игры без разделения полезности
21	Оптимальное распределение прибыли	кооперативное решение игры с разделением полезности
22	Оценка "силы"держателей акций	вектор Шепли для кооперативной игры

Дома:

№	Источник:	Задание
1	Конспект лекции №1	Выучить основные понятия теории управления.
2	Математические модели принятия решений в экономике Учебное пособие В.В. Розен Л.В. Бессонов	Изучить С1-13. Знать основные понятия
3	Математические модели принятия решений в экономике Учебное пособие В.В. Розен Л.В. Бессонов	Выполнить тест на с.14

ТЕМА 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ПРИНЦИПЫ, МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

1. Основные принципы математического моделирования
2. Методы исследования математических моделей
3. Математические модели в научных исследованиях. Математические модели биологии, экономике, в статистической механике.

1. Основные принципы математического моделирования

1.1. Вариационные принципы.

Еще один подход к построению моделей, по своей широте и универсальности сопоставимый с возможностями, даваемыми фундаментальными законами, состоит в применении так называемых вариационных принципов. Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте (системе, явлении) и гласят, что из всех возможных вариантов его поведения (движения, эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию. Обычно согласно этому условию некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения при его переходе из одного состояния в другое.

1.2. Применение аналогий при построении моделей.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы, общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая моделью Мальтуса.

1.3. Иерархический подход к получению моделей.

Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип "от простого — к сложному", когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая.

1.4. Нелинейность математических моделей.

Простота рассмотренных выше моделей во многом связана с их линейностью. В математическом плане это важное понятие означает, что справедлив принцип суперпозиции, т. е. любая линейная комбинация решений (например, их сумма) также является решением задачи. Пользуясь принципом суперпозиции, нетрудно, найдя решение в каком-либо частном случае, построить решение в более общей ситуации. Поэтому о качественных свойствах общего случая можно судить по свойствам частного - различие между двумя решениями носит лишь количественный характер. Например, в случае линейных моделей отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения. Для нелинейных явлений, математические модели которых не подчиняются принципу суперпозиции, знание о поведении части объекта еще не гарантирует знания поведения всего объекта, а его отклик на изменение условий может качественно зависеть от величины этого изменения. Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности.

Этапы построения моделей.

Процесс построения моделей может быть условно разбит на следующие этапы.

Этап 1. Словесно-смысловое описание объекта или явления.

Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и целях его исследования эта стадия может содержать также некоторые предположения (невесомый стержень, толстый слой вещества, прямолинейное распространение световых лучей и т.д.). Данный этап можно назвать формулировкой предмодели.

Этап 2. Завершение идеализации объекта.

Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Например, при составлении баланса материи не учитывался, ввиду его малости, дефект масс, которым сопровождается радиоактивный распад. По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме, с тем чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю.

Этап 3. Формулировка закона, которому подчиняется объект, и его записи в математической форме.

После выполнения первых двух этапов можно переходить к выбору или формулировке закона (вариационного принципа, аналогии и т.п.), которому подчиняется объект, и его записи в математической форме. При необходимости используются дополнительные сведения об объекте, также записываемые математически (например, постоянство величины для всех траекторий лучей света, вытекающее из геометрии задачи). Следует иметь в виду, что даже для простых объектов выбор соответствующего закона отнюдь не тривиальная задача.

Этап 4. Оснащение модели.

Завершает формулировку модели ее "оснащение". Например, необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (скорость ракеты и ее массу в момент $t = 0$) или иные его характеристики, без знания которых невозможно определить поведение объекта. И, наконец, формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, достичь понимания закономерностей изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т. д.).

Этап 5. Исследование модели.

Построенная модель изучается всеми доступными исследователю методами, в том числе со взаимной проверкой различных подходов. В отличие от рассматриваемых простейших случаев, большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, неизвестно.

Этап 6. Анализ адекватности модели.

В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность - соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного, и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.

2. Методы исследования математических моделей

Все методы математического моделирования можно разделить на четыре класса:

1. аналитические (априорные);

2. имитационные (априорно-апостериорные) модели;

3. эмпирико-статистические (апостериорные) модели;

4. модели, в которых в той или иной форме представлены идеи искусственного интеллекта (самоорганизация, эволюция, нейросетевые конструкции и т.д.).

Аналитические модели (англ. analytical models) – один из классов математического моделирования, широко используемый в экологии. При построении таких моделей исследователь сознательно отказывается от детального описания экосистемы, оставляя лишь наиболее существенные, с его точки зрения, компоненты и связи между ними, и использует достаточно малое число правдоподобных гипотез о характере взаимодействия компонентов и структуры экосистемы. Аналитические модели служат, в основном, целям выявления, математического описания, анализа и объяснения свойств или наблюдаемых феноменов, присущих максимально широкому кругу экосистем. Так, например, широко известная модель конкуренции Лотки–Вольтерра позволяет указать условия взаимного сосуществования видов в рамках различных сообществ.

Имитационные модели (англ. simulation models) – один из основных классов математического моделирования. Целью построения имитаций является максимальное приближение модели к конкретному (чаще всего уникальному) экологическому объекту и достижение максимальной точности его описания. Имитационные модели претендуют на выполнение как объяснительных, так и прогнозных функций, хотя выполнение первых для больших и сложных имитаций проблематично (для удачных имитационных моделей можно говорить лишь о косвенном подтверждении непротиворечивости положенных в их основу гипотез). Имитационные модели реализуются на ЭВМ с использованием блочного принципа, позволяющего всю моделируемую систему разбить на ряд подсистем, связанных между собой незначительным числом обобщенных взаимодействий и допускающих самостоятельное моделирование с использованием своего собственного математического аппарата (в частности, для подсистем, механизм функционирования которых неизвестен, возможно построение регрессионных или самоорганизующихся моделей). Такой подход позволяет также достаточно просто конструировать, путем замены отдельных блоков, новые имитационные модели.

Если имитационные модели реализуются без блочного принципа, можно говорить о квазиимитационном моделировании. Имитации, в которых все коэффициенты определены по результатам экспериментов над конкретной экосистемой, называются портретными моделями (цитата из В.В. Налимова [1971]: “поражают иной раз так называемые "портретные модели", в которых не заключено какое-либо большое содержание, а просто на языке математики записывается то, что с одинаковым успехом можно было бы выразить и на обычном языке. Ясно, что такие модели вызывают только раздражение у представителей конкретных областей знаний. Что нового, например, получила биология от того, что часть ее представлений была переформулирована в терминах теории информации?”) Методы построения имитационных моделей чаще всего основываются на классических принципах системной динамики Дж. Форрестера [1978] (см. также [Гильманов, 1978; Крапивин с соавт., 1982]). Создание имитационных моделей сопряжено с большими затратами. Так, модель ELM (злаковниковой экосистемы, используемой под пастбище) строилась 7 лет с годовым бюджетом программы в 1,5 млн. долл. около 100 научными сотрудниками из более 30 научных учреждений США, Австралии и Канады [цит. по: Розенберг., 1984].

В настоящее время можно отметить два направления развития имитационного моделирования, где предлагаются достаточно конструктивные методы компенсации априорной неопределенности, проистекающей от нестационарного и стохастического характера экологических систем.

Первое направление оформилось в виде методики решения задач идентификации и верификации как последовательного процесса определения и уточнения численных значений коэффициентов модели [Георгиевский, 1982; Сердюцкая, 1984].

Второе направление связано со стратегией поиска скрытых закономерностей моделируемой системы и интеграции их в модель [Лапко с соавт., 1999].

Эмпирико-статистические модели объединяют в себе практически все биометрические методы первичной обработки экспериментальной информации. Основная цель построения этих моделей состоит в следующем:

- упорядочение или агрегирование информации;

- поиск, количественная оценка и содержательная интерпретация причинно-следственных отношений между переменными системы;

- оценка достоверности и продуктивности различных гипотез о взаимном влиянии наблюдаемых явлений и воздействующих факторов;

- идентификация параметров расчетных уравнений различного назначения.

Часто эмпирико-статистические модели являются "сырьем" и обоснованием подходов к построению моделей других типов (в первую очередь, имитационных). Важным методологическим вопросом является определение характера зависимости между факторами и результативными показателями: функциональная она или стохастическая, прямая или обратная, прямолинейная или криволинейная и т.д. Здесь используются теоретико-статистические критерии, практический опыт, а также способы сравнения параллельных и динамичных рядов, аналитических группировок исходной информации, графические методы и др. Детерминированный анализ представляет собой методику исследования влияния факторов, связь которых с результативным показателем носит явно выраженный функциональный характер, т.е. когда результативный показатель представляется в виде произведения, частного или алгебраической суммы исходных факторов. Стохастический анализ представляет собой обширный класс методов, опирающихся на теоретико-вероятностные представления, теоремы, критерии и методы параметрической и непараметрической статистики. Искусственный интеллект ИИ (artificial intelligence) обычно трактуется как свойство автоматических систем брать на себя отдельные функции мыслительной способности человека, например, выбирать и принимать оптимальные решения на основе ранее полученного опыта и рационального анализа внешних воздействий. Речь идет, в первую очередь, о системах, в основу которых положены принципы обучения, самоорганизации и эволюции при минимальном участии человека, но привлечении его в качестве учителя и партнёра, гармоничного элемента человеко-машинной системы.

Этапы построения математической модели. Сущность построения математической модели состоит в том, что реальная система упрощается, схематизируется и описывается с помощью того или иного математического аппарата.

Можно выделить следующие основные этапы построения математических моделей.

1. Содержательное описание моделируемого объекта. Объекты моделирования описываются с позиций системного подхода. Исходя из цели исследования устанавливаются совокупность элементов, взаимосвязи между элементами, возможные состояния каждого элемента, существенные характеристики состояний и отношения между ними. Например, фиксируется, что если значение одного параметра возрастает, то значение другого — убывает и т.п. Вопросы, связанные с полнотой и единственностью выбора характеристик, не рассматриваются. Естественно, в таком словесном описании возможны логические противоречия, неопределенности. Это исходная естественно-научная концепция исследуемого объекта. Такое предварительное, приближенное представление системы называют концептуальной моделью. Для того чтобы содержательное описание служило хорошей основой для последующей формализации, требуется обстоятельно изучить моделируемый объект. Нередко естественное стремление ускорить разработку модели уводит исследователя от данного этапа непосредственно к решению формальных вопросов. В результате построенная без достаточного содержательного базиса модель оказывается непригодной к использованию. На этом этапе моделирования широко применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели.

2. Формализация операций. Формализация сводится в общих чертах к следующему. На основе содержательного описания определяется исходное множество характеристик системы. Для выделения существенных характеристик необходим хотя бы приближенный анализ каждой из них. При проведении анализа опираются на постановку задачи и понимание природы исследуемой системы. После исключения несущественных характеристик выделяют управляемые и неуправляемые параметры и производят символизацию. Затем определяется система ограничений на значения управляемых параметров. Если ограничения не носят принципиальный характер, то ими пренебрегают. Дальнейшие действия связаны с формированием целевой функции модели. В соответствии с известными положениями выбираются показатели исхода операции и определяется примерный вид функции полезности на исходах. Если функция полезности близка к пороговой

(или монотонной), то оценка эффективности решений возможна непосредственно по показателям исхода операции. В этом случае необходимо выбрать способ свертки показателей (способ перехода от множества показателей к одному обобщенному показателю) и произвести саму свертку. По свертке показателей формируются критерий эффективности и целевая функция. Если при качественном анализе вида функции полезности окажется, что ее нельзя считать пороговой (монотонной), прямая оценка эффективности решений через показатели исхода операции неправомочна. Необходимо определять функцию полезности и уже на ее основе вести формирование критерия эффективности и целевой функции. В целом замена содержательного описания формальным — это итеративный процесс.

3. Проверка адекватности модели. Требование адекватности находится в противоречии с требованием простоты, и это нужно учитывать при проверке модели на адекватность. Исходный вариант модели предварительно проверяется по следующим основным аспектам: o Все ли существенные параметры включены в модель? o Нет ли в модели несущественных параметров? o Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами? o Правильно ли определены ограничения на значения параметров? Для проверки рекомендуется привлекать специалистов, которые не принимали участия в разработке модели. Они могут более объективно рассмотреть модель и заметить ее слабые стороны, чем ее разработчики. Такая предварительная проверка модели позволяет выявить грубые ошибки. После этого приступают к реализации модели и проведению исследований. Полученные результаты моделирования подвергаются анализу на соответствие известным свойствам исследуемого объекта.

Для установления соответствия создаваемой модели оригиналу используются следующие пути:

- o сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях;
- o использование других близких моделей;
- o сопоставление структуры и функционирования модели с прототипом.

Главным путем проверки адекватности модели исследуемому объекту выступает практика. Однако она требует накопления статистики, которая далеко не всегда бывает достаточной для получения надежных данных. Для многих моделей первые два приемлемы в меньшей степени. В этом случае остается один путь: заключение о подобии модели и прототипа делать на основе сопоставления их структур и реализуемых функций. Такие заключения не носят формального характера, поскольку основываются на опыте и интуиции исследователя. По результатам проверки модели на адекватность принимается решение о возможности ее практического использования или о проведении корректировки.

4. Корректировка модели. При корректировке модели могут уточняться существенные параметры, ограничения на значения управляемых параметров, показатели исхода операции, связи показателей исхода операции с существенными параметрами, критерий эффективности. После внесения изменений в модель вновь выполняется оценка адекватности.

5. Оптимизация модели. Сущность оптимизации моделей состоит в их упрощении при заданном уровне адекватности. Основными показателями, по которым возможна оптимизация модели, выступают время и затраты средств для проведения исследований на ней. В основе оптимизации лежит возможность преобразования моделей из одной формы в другую. Преобразование может выполняться либо с использованием математических методов, либо эвристическим путем.

3. Математические модели в научных исследованиях. Математические модели биологии, экономике, в статистической механике.

Вопросы научного поиска, связанные с возникновением нового знания, волновали ученых на протяжении всей истории развития науки. Сегодня в сферу научно-исследовательской деятельности вовлечены сотни тысяч людей во всем мире, результаты их исследований используются в развитии общества. У начинающих исследователей, приступающих к научной работе, всегда возникает ряд вопросов, связанных с методологическими проблемами осуществления научно-исследовательской деятельности.

Научное исследование – это длительный и непрерывный процесс получения новых научных знаний, один из видов познавательной деятельности. Научное исследование может носить прикладной характер, направленный на достижение конкретных частных целей, а может иметь фундаментальный характер, означающий производство новых знаний независимо от перспектив его применения. Еще важнее, с точки зрения простого студента, понять, каким образом возникают такие объекты, как «дифференциал», «определенный интеграл», «дифференциальное уравнение», и многие другие. Другой важной проблемой является применение этих понятий в практической деятельности. Многие эти моменты удается объединить в одно целое с помощью понятия «математическая модель». Данное понятие включает в себя постановку задачи, алгоритм решения, а также непосредственное представление результата в различных понятных нам видах: аналитическом, табличном, графическом. Процесс решения задачи исходит из гипотезы, то есть научного предположения, истинное значение которого пока неопределенно. Далее следуют теоретический анализ гипотезы и накопление материала для проверки ее обоснованности. Этот процесс описывается формулами, и с помощью исходных данных, полученных в результате опытов, решается вполне конкретная практическая задача. При этом иногда удается понять различный смысл вложенных понятий, таких как геометрический смысл, физический смысл, биологический смысл и т. д. Конечной точкой научного исследования является получение нового научного знания, к важнейшим критериям которого можно отнести объективность, доказательность, системность, проверяемость.

Дома:

№	Источник:	Задание
1	Конспект лекции №2	Выучить основные понятия теории управления.
2	Математические модели принятия решений в экономике Учебное пособие В.В. Розен Л.В. Бессонов	Изучить С47-65. Знать основные понятия
3	Математические модели принятия решений в экономике Учебное пособие В.В. Розен Л.В. Бессонов	Выполнить задания на с.61

ТЕМА 3 ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

1. Классические задачи линейного программирования
2. Классические задачи нелинейного программирования
3. Графические модели.

1. Классические задачи линейного программирования

Формулировка задачи и ее геометрическое истолкование

Задачи математического программирования – это задачи на поиск оптимального решения

Задача оптимизации:

f(x) → max (min), x ϵ X, где

X – допустимое множество,

f(x) – целевая функция

Если функция имеет линейный вид:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots.. + a_n x_n + b$

речь идет о задачи линейного программирования

<u>**Основные понятия и обозначения:**</u>

1. Любое x ϵ X называется ***допустимым решением***

2. Допустимое решение, дающее *max (min) f(x),* называется ***оптимальным решением (планом)***

3. Неравенства называются ***ограничениями***

4. Решение системы всех неравенств называется ***областью допустимых решений***

Наиболее часто встречаются две разновидности задач линейного программирования:

1. Каноническая (основная). Система ограничений, помимо тривиальных ограничений, включает в себя только уравнения.

2. Стандартная (симметричная). Система ограничений состоит только из неравенств

Стандартный вид:

$f(x) = -2x_1 + x_2 + 1 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq$

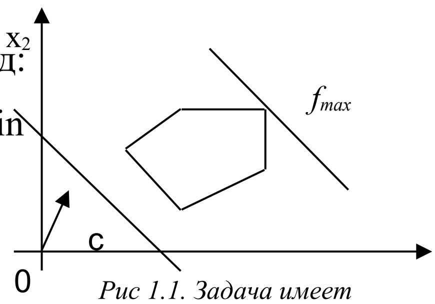


Рис 1.1. Задача имеет единственное решение

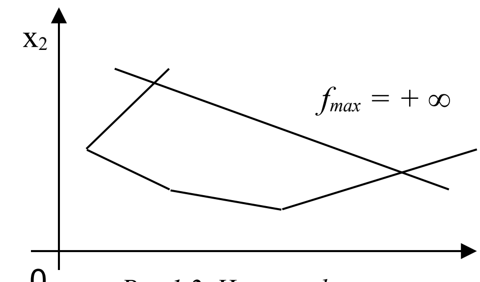


Рис 1.2. Целевая функция не ограничена

Канонический вид:

$x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 = 0$

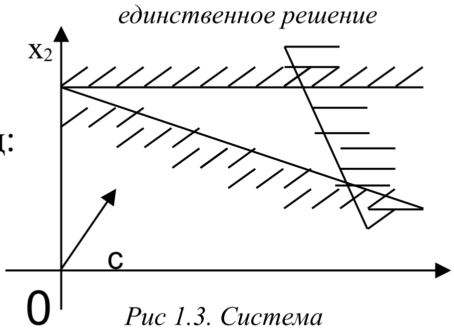
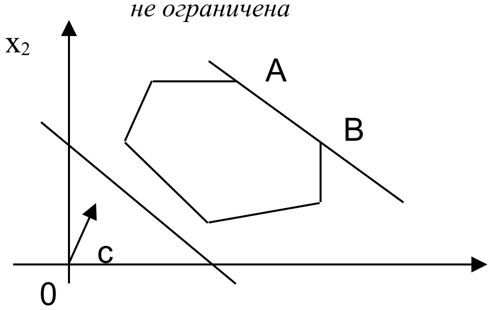


Рис 1.3. Система Ограничений несовместна



$x_1 - x_2 - x_4 = 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Пример решения задачи

Найти max и min функции $f(x) = x_1 + x_2$ при заданной системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

***Построим многоугольник решений**:*

Выразим x_2 через x_1:

$$\begin{cases} x_2 \le 4 - \frac{1}{2} x_1 \ (1) \\ x_2 \le 4 + 2x_1 \quad (2) \end{cases}$$

$x_2 \ge 3 - \frac{1}{3} x_1$ (3)

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ (4)

2. Построим графики функций:

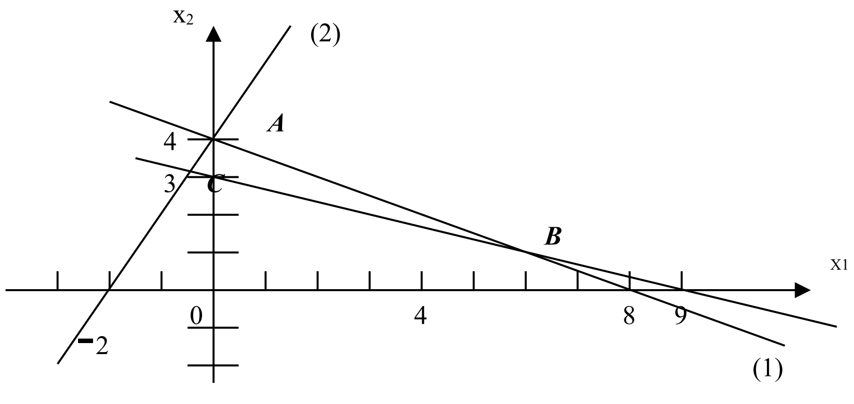
x_1	0	8
x_2	4	0

x_1	-2	0
x_2	0	4

x_1	0	9
x_2	3	0

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{1}{2} x_1 \\ x_2 = 4 + 2x_1 \end{cases}$$

$x_2 = 3 - \frac{1}{3} x_1$



Найдем координаты точек пересечения прямых (1), (2),(3):

1. Пересечением прямой (1) и прямой (2) является точка А:

$4 - \frac{1}{2} x_1 = 4 + 2x_1$

$- \frac{1}{2} x_1 - 2x_1 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 4$

Так, координаты точки А (0,4)

Так как $f(x) = x_1 + x_2$, то значение функции в точке А $f(0,4) = 4$

2. Пересечением прямой (1) и прямой (3) является точка В:

$4 - \frac{1}{2} x_1 = 3 - \frac{1}{3} x_1$

$- \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_1 = 3 - 4$

$- \frac{1}{6} x_1 = -1, x_1 = 6, x_2 = 1$

Так, координаты точки В (6;1)

Так как $F(x) = x_1 + x_2$, *то значение функции в точке А —* $F(6,1) = 9$

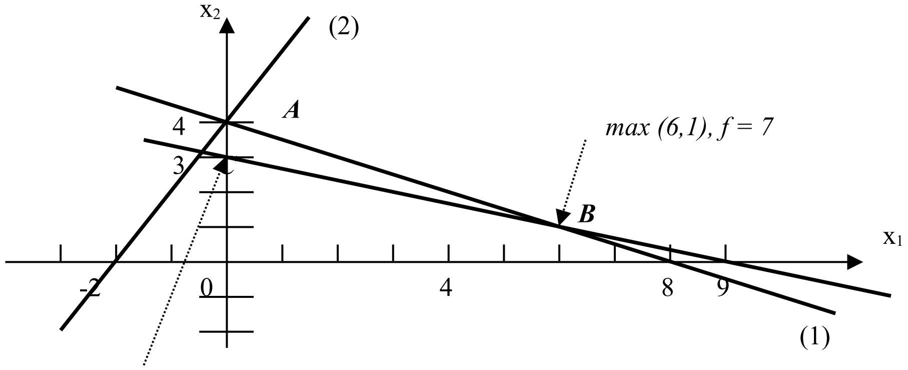
3. Т. к. по условию задачи

А линии (1) и (3) пересекаются там, где $x_1 < 0$,

То координаты точки С (0,3)

Так как $f(x) = x_1 + x_2$, то значение функции в точке С $f(0,3) = 3$

4. Так *max f(x)* в точке В, с координатами (6,1)



<u>Задача об использовании ресурсов (планировании производства)</u>

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Введем следующие обозначения:

x_j — число единиц продукции P_j, запланированной к производству;

b_i — запас ресурса S_i,

a_{ij} — число единиц ресурса S_i, затрачиваемое на единицу продукции P_j,

c_i — прибыль от реализации продукции P_j

Тогда <u>модель задачи</u> будет иметь вид:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow max$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ a_{11} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = 1 \div n$

Прибыль от единицы продукции P_1 составляет 2 рубля, а от единицы продукции P_2 – 3 рубля.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурса, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3

S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Экономико-математическая модель:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

<u>Задача о составлении рациона (технологическая задача)</u>

Необходимо составить такой дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Введем следующие обозначения:

x_j — число единиц корма j-го вода;

b_i — необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i,

a_{ij} — число единиц питательного вещества S i, в единице корма j-го вида,

c_i — стоимость единицы корма j-го вида

Тогда <u>модель задачи</u> будет иметь вид:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \ge b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \ge b_m \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = 1 \div n$

Стоимость 1кг корма вида I – 4 рубля, а вида II – 6 рублей. Используя данные таблицы, необходимо составить такой рацион питания, чтобы стоимость была минимальной, а содержание каждого вида питательных веществ было не менее установленного предела.

Питатаельное вещество	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц птательного вещества в 1кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	3

Экономико-математическая модель:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

<u>Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)</u>

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1, n_2, \ldots n_k$ единиц продукции $P_1, P_2, \ldots P_k$. Продукция производится на станках S_1, $S_2, \ldots$ S_m . Для каждого станка известны производительность a_{ij} и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков, чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

<u>Экономико-математическая модель задачи</u>:

Обозначим x_{ij} — время в течение которого станок S_i будет занят изготовлением продукции P_j

$x_{11} + x_{12} + \dots x_{1k} \le T$ $\qquad$ $a_{11} x_{11} + a_{21} x_{21} + \dots a_{m1} x_{m1} = n_1$

$x_{21} + x_{22} + \dots x_{2k} \le T$ $\qquad$ $a_{12} x_{12} + a_{22} x_{22} + \dots a_{m2} x_{m2} = n_2$

.... $\qquad$ ....

$x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mk} \le T$ $\qquad$ ....

$a_{1k} x_{1k} + a_{2k} x_{2k} + \dots a_{mk} x_{mk} = n_k$

$$\boldsymbol{f(x) = b_{11} x_{11} + b_{12} x_{12} + \dots + b_{mk} x_{mk} \to min}$$

3. Анализ чувствительности задачи линейного программирования

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ:

На сколько сократить или увеличить запасы ресурсов?

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции f?

2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

Определите суточную производственную программу небольшого цеха по пошиву женской одежды. Требуется установить количество брюк и юбок, которые нужно сшить за сутки, если известны затраты на пошив этих изделий и их цена реализации на рынке. Суточный спрос на брюки не превышает 18шт. Доход должен быть максимальным

Производственные факторы	Расходы на 1 готовое изделие		Максимально возможной суточный запас
	брюк	юбки	
Ткань, м	1,5	2	42
Трудоемкость, чел/час	3	2	60
Накладные расходы,	5	5	200

руб.			
Цена 1 изделия, руб.	60	50	

Имеем задачу линейного программирования:

$$f(x_1,x_2) = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ x_1 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Решим задачу графическим способом

Ограничения линейной модели классифицируют на:

- ***связывающие*** (активные) — прямые (1) и (2)
- ***несвязывающие*** (неактивные)

Прямая, представляющая связывающее ограничение должна проходить через оптимальную точку

Если ограничение — связывающее, то соответствующий ему ресурс называется ***дефицитным***

Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение —

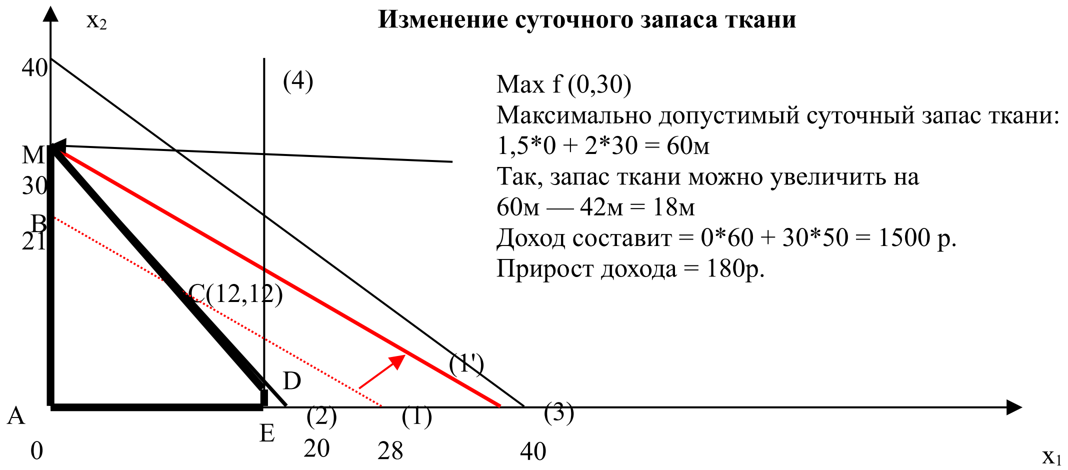
недефицитный

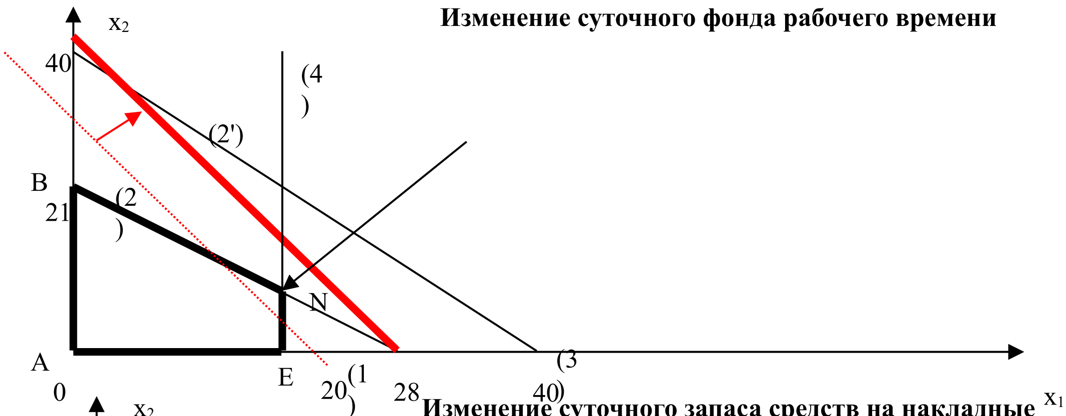
Ограничения, которые не участвуют в формировании пространства допустимых значений — ***избыточные***

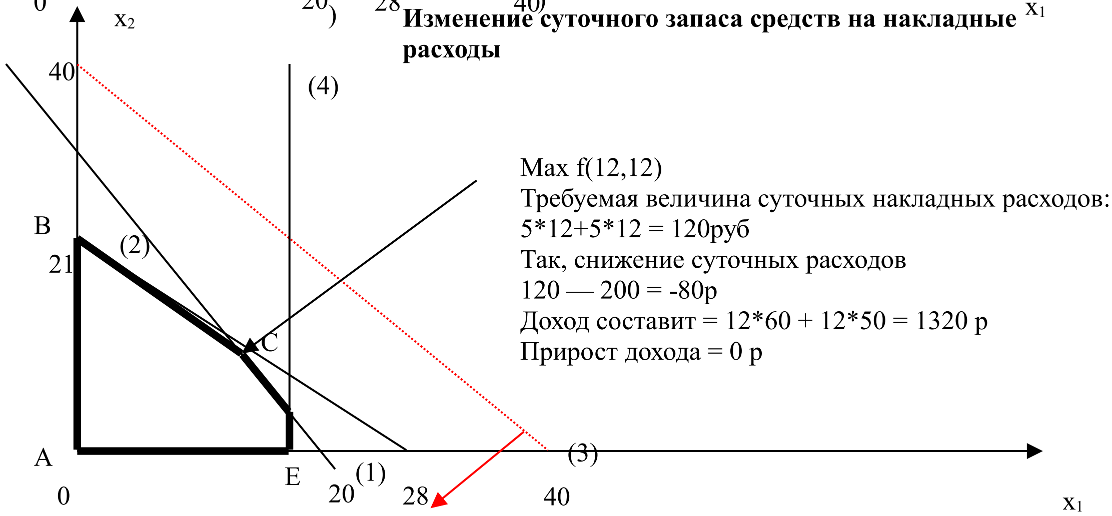
Анализ модели на чувствительность включает:

1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;

2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции







Результаты проведенного исследования можно свести в таблицу:

Ресурсы	Тип ресурсов	Максимальное изменение запаса ресурсов	Максимально изменение дохода от реализации, р.
1	Дефицитный	60 — 42 = 18 м.	1500 — 1320 = 180 р.
2	Дефицитный	69 — 60 = 9 чел/ час	1455 — 1320 = 15 р.
3	Избыточный	120 — 200 = -80 руб.	1320 — 1320 = 0 р.
4	Недефицитный	12 -18 = - 6 шт	1320 -1320 = 0р

ВТОРАЯ ЗАДАЧА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ:

Увеличение объема какого ресурса наиболее выгодно?

Пусть ценность дополнительной единицы ресурса i — y_i . Тогда величина y_i определяется из соотношения:

y_i = максимальное приращение оптимальногно значения дохода F / Максимально допустимый прирост ресурса I

Так, $y_1 = \frac{180\ руб}{18\ м} = 10\ руб/м$

$\mathbf{y_2} = \frac{135\ руб}{9\ ч/ч} = \mathbf{15}$ *руб/чел-час*

ТРЕТЬЯ ЗАДАЧА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ:

В каких пределах допустимо изменение коэффициентов функции?

1. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции,при котором не происходит изменения оптимального решения?

2. На сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы изменить статус некоторого ресурса?

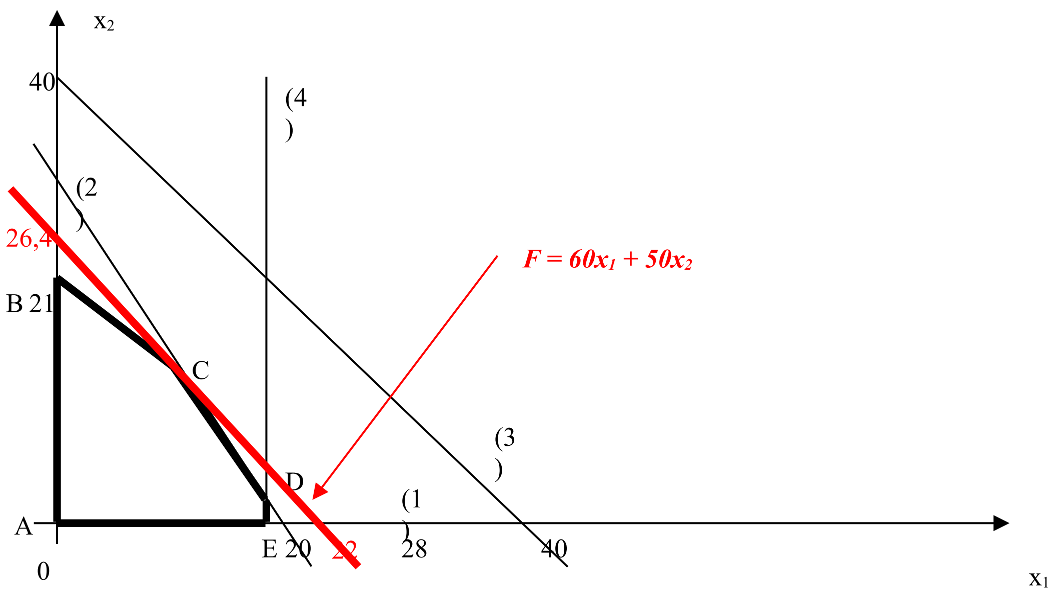
Построим график нашей целевой функции:

$F = 60x_1 + 50x_2$

Так, графиком целевой функции является прямая, проходящая через оптимальную точку С(12,12).

Прямая пересекает ось ординат в точке (0;26,4),

ось абсцисс в точке (22;0)



При изменении C_1 и C_2 график целевой функции вращается вокруг точки С:

Если C_1 увеличивается или C_2 уменьшается, прямая вращается по часовой стрелке

Если C_1 уменьшается или C_2 увеличивается, прямая вращается против часовой стрелки

Вычислим границы интервалов возможных колебаний C_1 и C_2, при которых С останется оптимальной.

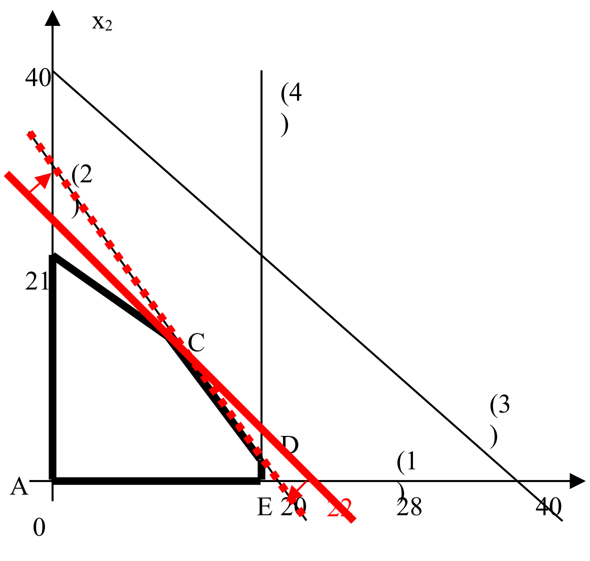
Зафиксируем $C_2 = 50$, тогда целевая функция:

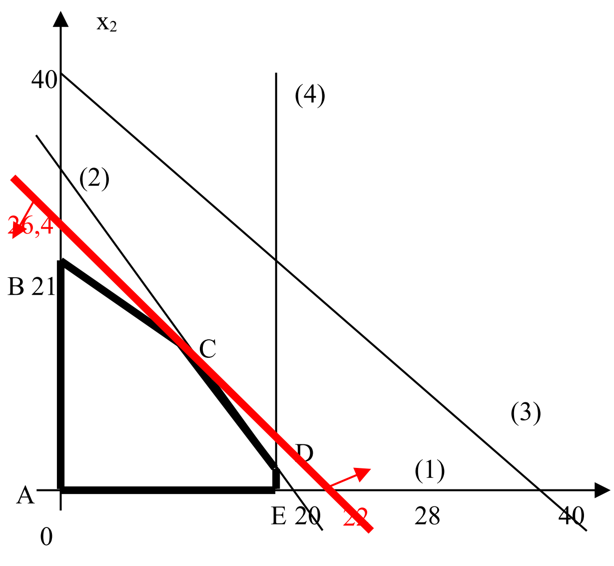
$C_1x_1 + 50x_2 = F$, $x2 = \frac{F}{50} - \frac{C1}{50} *x_1$, где $\frac{C1}{50}$ тангенс угла наклона прямой (1)

Точка С будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых ограничений (1) и (2)

Тангенс угла наклона для прямой (1) равен $\frac{3}{4}$,

для прямой (2) равен $\frac{3}{2}$





Определим диапазон колебаний c_1:

$\frac{C1}{50} = \frac{3}{4}$, тогда $c_1 = 37{,}5$

$\frac{C1}{50} = \frac{3}{2}$, тогда $c_1 = 75$

Таким образом интервал изменения c_1,в котором точка с — единственная оптимальная, определяется неравенством $37{,}5 \leq c_1 \leq 75$

Зафиксируем $c_1 = 60$, тогда целевая функция:

$F = 60x_1 + c_2x_2$

$x_2 = \frac{F}{C2} - \frac{60}{c2} \cdot x_1$

$\frac{60}{c2} = \frac{3}{2}$, $c_1 = 40$

$\frac{60}{c2} = \frac{3}{4}$, $c_2 = 80$

Таким образом интервал изменения c_2,в котором точка с — единственная оптимальная, определяется неравенством $40 \leq c_2 \leq 80$

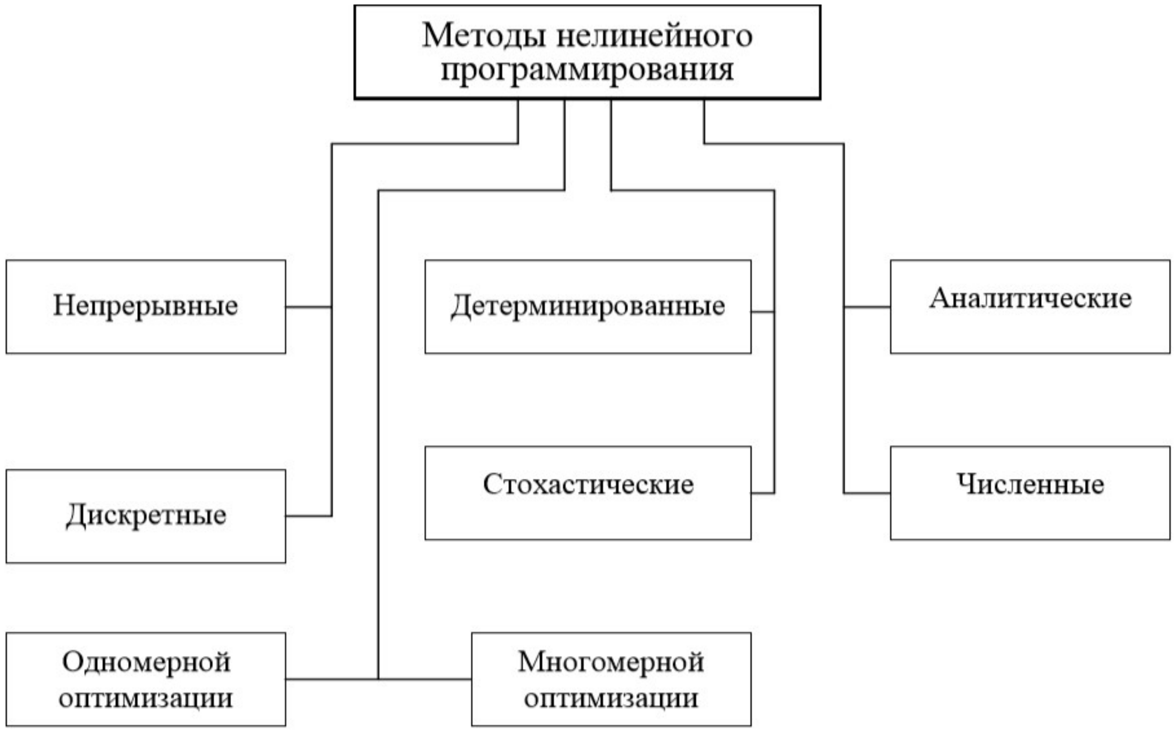
Как только $c_1 = 37{,}5$долл., ресурс (2) становится недефицитным. т. е., если доход от продажи одних брюк станет меньше 37,5 долл., надо пересматривать суточную производственную программу. Теперь $x_1 = 21$, $x_2 = 0$

Когда значение C_1 превысит 75 долл., суточная производственная программа будет предусматривать 18 брюк и 3 юбок (оптимальный план — точка D)

2. Классические задачи нелинейного программирования

Нелинейное программирование (НП) представляет собой раздел в теории математического программирования, предметом которого является изучение экстремальных задач с нелинейными целевыми функциями и ограничениями.

В инженерной практике под нелинейным программированием обычно понимают методы формализации и решения задач параметрической оптимизации нелинейных целевых (критериальных) функций в условиях нелинейных функциональных ограничений.



Алгоритм решения задачи НП Графическим методом

Шаг 1. На плоскости *x1Ox2* строят область допустимых решений, определенную ограничениями. Если область пуста, т. е. ограничения несовместны, то задача не имеет решения. В противном случае переходят к шагу 2.

Шаг 2. Строят линии уровня функции *f(x1, x2) = C*, где C - некоторая константа. Переход к шагу 3.

Шаг 3. Определяют направление возрастания (при максимизации), убывания (при минимизации) функции f .

Шаг 4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит линии уровня *f(x1, x2) = C*, с наибольшим (при максимизации), наименьшим (при минимизации) значением C или устанавливают неограниченность функции на области допустимых решений.

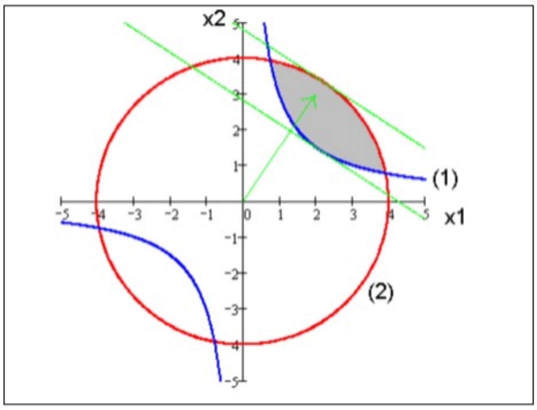
Шаг 5. Определяют значения *x1, x2* для точки, найденной на шаге 4, и величину функции f в этой точке.

Пример решения задачи НП графическим методом

Решить задачу нелинейного программирования

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 3; \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$



$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}; \quad x_2 = \sqrt{2}; \quad f_{\min} = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Алгоритм метода множителей Лангранжа

Шаг 2. Находят частные производные функции Лагранжа по x_j и λ_j, $j = \overline{1,n}$; $i = \overline{1,m}$ и приравнивают их к нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0; \quad j = \overline{1,n} \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i; \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{2.55}$$

Шаг 3. Решают систему (2.55) и определяют точки, в которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может иметь экстремум.

Шаг 4. Проверяют полученные на шаге 3 точки на экстремум и определяют экстремальное значении функции f в найденной точке.

Пример решения задачи методом Лангранжа

Фирма реализует автомобили двумя способами: через магазин и через торговых агентов. При реализации x_1 автомобилей через магазин расходы на реализацию составляют $4x_1 + x_1^2$ у.е., а при продаже x_2 автомобилей через торговых агентов расходы составляют x_2^2 у.е. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 штук.

Решение задачи

Составим математическую модель задачи.

Целью является минимизация суммарных расходов $R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$.

Управляющие переменные – это число автомобилей, реализуемых первым и вторым способом: x_1 и x_2, соответственно (всего - 200 штук).

Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 + \lambda(200 - x_1 - x_2).$$

Найдем частные производные функции F по переменным x_1, x_2 и λ и приравниваем их к нулю. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + 4 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, найдем

$$x_1 = 99,\ x_2 = 101,\ \lambda = 202,\ f(x_1, x_2) = 20398.$$

Определитель, составленный из вторых частных производных функций f по x_1, x_2, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Следовательно, по теореме о достаточном условии существования условного экстремума функция f в точке с координатами $x_1 = 99$, $x_2 = 101$ действительно имеет экстремум

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 > 0,$$

следовательно в этой точке функция f имеет условный экстремум.

Таким образом, для получения минимальных расходов, нужно реализовать 99 автомобилей через магазин и 101 автомобиль через торговых агентов. При этом расходы на реализацию составят **20398** у.е.

Методы поиска экстремального значения Целевой Функции

Группа 1.Градиентные методы

1) метод градиента

2) метод наискорейшего пуска

3) Метод сопряженных градиентов

4) метод проектирования градиента

Группа 2. Методы прямого поиска

1) метод Гаусса-Зайделя;

2) метод вращения координат

3) метод конфигураций

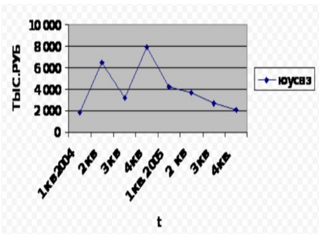
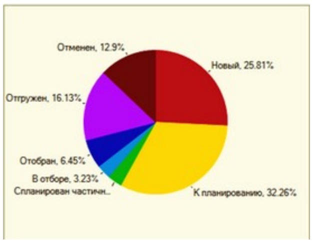
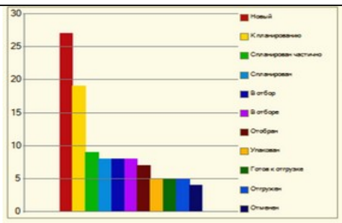
4) метод случайного поиска

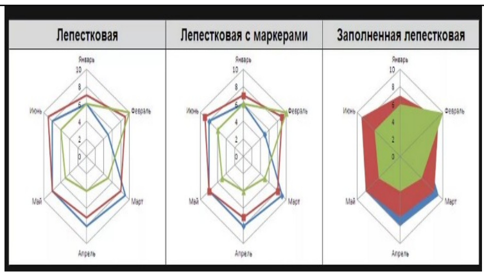
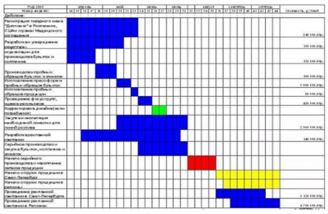
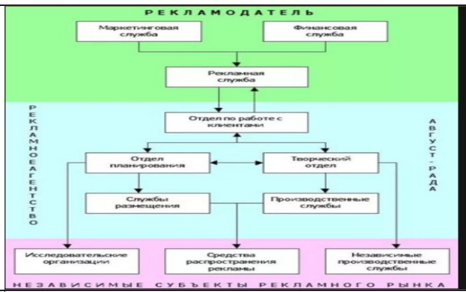
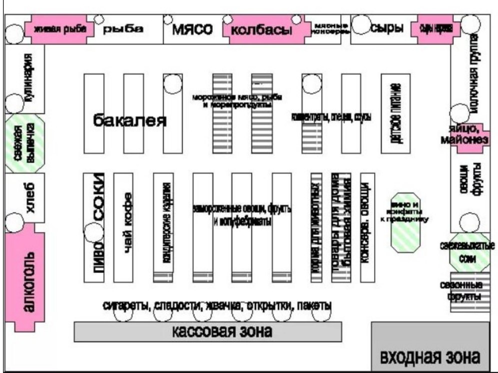
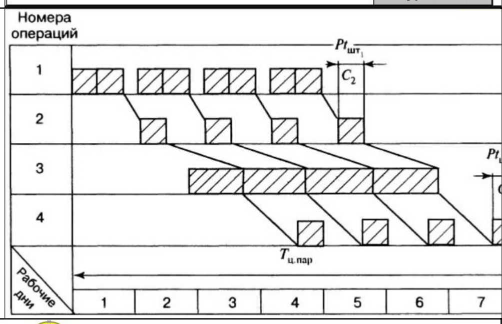
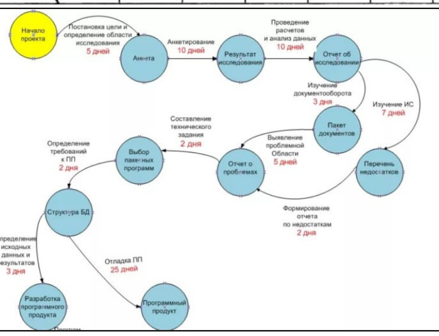
3. Графические модели

- графики / диаграммы с целью карты сравнения плановых и фактических показателей, диаграмма Парето, контрольные карты

- схемы: блок-схемы, причинно-следственная диаграмма Исикава, движения, расположения

- графы

Тип графика		Цель использования
Линейные графики		динамика показателей
Круговая диаграмма		Занимаемая доля, емкость
Гистограмма		динамика показателей
Лепестковая диаграмма		Сравнительный анализ нескольких субъектов по нескольким параметрам

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Диаграмма Ганта</td><td></td><td>Распределение функций, работ во времени</td></tr>
<tr><td>Блок-схемы</td><td>
</td><td>Расположение объектов:
- по времени</td></tr>
<tr><td>Схемы расположений</td><td>
</td><td>Расположение объектов:
- по месту</td></tr>
<tr><td>Схемы производства</td><td>
</td><td>Расположение объектов:
- по выполняемым функциям</td></tr>
<tr><td>Графы</td><td>
</td><td>Расположение объектов:
- по времени
- по месту
- по выполняемым функциям</td></tr>
</table>

ТЕМА 4 ТРАНСПОРТНЫЕ МОДЕЛИ

1. Транспортная задача
2. Задача о назначении

2. Транспортная задача

Применение алгоритма транспортной задачи требует выполнение следующих предпосылок:

1. Должна быть известна стоимость перевозки единицы продукта из каждого пункта производства в каждый пункт назначения.
2. Должен быть известен запас продуктов в каждом пункте производства
3. Известны потребности в продуктах в каждом пункте потребления

Общее предложение должно быть равно общему спросу

Алгоритм решения транспортной задачи состоит из 4 этапов:

Этап 1. Представление данных в форме стандартной таблицы и поиск любого допустимого распределения ресурсов.

Допустимым называется такое распределение ресурсов, которое позволяет удовлетворит весь спрос в пунктах назначения и вывезти весь запас продуктов из пунктов производства

Этап 2. Проверка полученного распределения ресурсов на оптимальность.

Этап 3. Если полученное распределение ресурсов не является оптимальным, то ресурсы перераспределяются, снижая стоимость траспортировки

Этап 4. Повторная проверка оптимальности полученного распределения ресурсов

<u>Пример задачи.</u>

Три торговых склада P, Q, R – могут поставлять некоторое изделие в количестве 9, 4 и 8 единиц соответственно. Величины спроса трех магазинов розничной торговли, находящихся в пунктах A, B и C, на это изделие равны 3, 5 и 6 единицам соответственно. Какова минимальная стоимость транспортировки изделий от поставщиков потребителям?

Единичные издержки транспортировки приведены в табл.:

Поставщик	Транспорт. издержки для магазинов, у.е. за единицу			Общий объем предложения
	A	B	C	
P	10	20	5	9
Q	2	10	8	4
R	1	20	7	8
Общий объем спроса	**3**	**5**	**6**	

Решение Сбалансированная транспортная таблица:

Поставщик	Транспорт. издержки для магазинов, у.е. за единицу				Общий объем предложения
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9
Q	2	10	8	0	4
R	1	20	7	0	8
Общий объем спроса	**3**	**5**	**6**	7	**21**

Метод 1. Метод минимальной стоимости

1. В клетку с минимальной единичной стоимостью записывают наибольшее возможное кол-во продукта

2. Производится корректировка оставшихся объем предложения и потребностей

3. Выбирается след.клетка с наименьшей стоимостью, в которую помещается наибольшее возможное количество продукта, и т. д. До тех пор, пока спрос и предложение не станут равными нулю

4. Если наименьшее значение стоимости соответствует более чем одной клетки таблицы, выбор осуществляется случайным образом.

Начальное распределение ресурсов, полученное методом минимальной стоимости

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	- $\boxed{10}$	- $\boxed{20}$	2 $\boxed{5}$	7 $\boxed{0}$	~~9~~ ~~2~~ 0
Q	- $\boxed{2}$	4 $\boxed{10}$	- $\boxed{8}$	0 $\boxed{0}$	~~4~~ 0
R	3 $\boxed{1}$	1 $\boxed{20}$	4 $\boxed{7}$	0 $\boxed{0}$	~~8~~ ~~5~~ ~~1~~ 0
Общая потребность	~~3~~ 0	~~5~~ ~~1~~ 0	~~6~~ ~~4~~ 0	7 0	21

Стоимость = (3*1) + (4*10) +(1*20) + (2*5) + (4*7) +(7*0) = 101

Метод Фогеля.

Основан на «штрафной стоимости». Штрафная стоимость для каждой строки и столбца — разность между наиболее дешевым маршрутом и следующим за ним с точки зрения критерия минимизации стоимости перевозок.

Суть метода состоит в минимизации штрафов.

Алгоритм:

1. Вычислить значения штрафной стоимости для каждой строки и столба
2. Выбрать строку или столбец с наибольшим значением штрафной стоимости, и в клетку с наименьшим значением стоимости перевозки для данной строки и столбца помещается наибольшее количество продукта.
3. Провести корректировка итоговых значений по строкам и столбцам таблицы
4. В строках или столбцах, где предложение или спрос равны нулю ставится прочерк
5. Произвести возврат к шагу 1 и пересчитать штрафные стоимости без учета клеток, где указаны перевозки, или клеток, где стоит прочерк

Начальное распределение перевозок, полученное методом Вогеля

Торговый склад	Розничный магазин A	B	C	Фиктивный	Общее Предл.	Штрафная Стоимость 1 2 3
P	- [10]	1 [20]	6 [5]	2 [0]	~~9 8 2~~ 0	5 5 5
Q	- [2]	4 [10]	- [8]	- [0]	~~4 0~~	2 - -
R	3 [1]	- [20]	- [7]	5 [0]	~~8 5 0~~	1 2 7
Общая потребность	~~3~~ 0	~~5~~ ~~1~~ 0	~~6~~ 0	~~7 2~~ 0	21	
1-й штраф	1	10	2	0		
2-й штраф	9	0	2	0		
3-й штраф	-	0	2	0		

Этап 4 решения транспортной задачи

Проверка на оптимальность

1. Если решение оптимально, количество заполненных клеток будет (m+n-1), где

M — кол-во торговых складов

N — кол-во розничных магазинов

2. Если условие п.1 выполняется применяют 2 метода проверки на оптимальность:

Метод 1 — Метод ступенек

Метод 2 — Метод МОДИ (модифицированых распределений)

Проверка начального распределения перевозок на оптимальность — **метод ступенек**

Торговый склад	Розничный магазин A	B	C	Фиктивный	Общее предложение
P	+11 [10]	+2 [20]	2 [5]	7 [0]	9
Q	+11 [2]	4 [10]	+11 [8]	+8 [0]	4
R	3 [1]	1 [20]	4 [7]	-2 [0]	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Метод МОДИ основан на вычислении теневых цен

Теневые цены для каждой пустой (небазисной) клетки можно найти из соотношения:

$S_{ij} = c_{ij} — (u_i + v_j)$

Где u_i — компонента, соответствующая строке,

v_j — компонента, соответствующая столбцу

i, j — номер строки и столбца

Эта теневая цена отражает дополнительную стоимость транспортировки единицы изделия из пункта i в пункт j.

Если все теневые цены положительны или равны нулю ($S_{ij} \geq 0$), то решение оптимально

$C_{13} = 5 = u_1 + v_3$ для заполненной клетки (P, C)

$C_{14} = 0 = u_1 + v_4$ для заполненной клетки (P, фиктивный)

$C_{33} = 7 = u_3 + v_3$ для заполненной клетки (R,C)

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1$ для заполненной клетки (R,A)

$C_{32} = 20 = u_3 + v_2$ для заполненной клетки (R,B)

$C_{22} = 10 = u_2 + v_2$ для заполненной клетки (Q,B)

Пусть u1 = 0. Следовательно $v_3 =5$, $v_4 =0$, $u_3 =2$, $v_1 =-1$, $v_2 =18$, $u_2 = -8$

Подставим полученные значения в $S_{ij} = c_{ij} — (u_i + v_j)$ и получим теневые цены:

S_{11} = 10 — (0 + (-1)) = +11 *для пустой клетки (P, A)*

S_{12} = 20 — (0 + 18) = +2 *для пустой клетки (P, B)*

S_{21} = 2 - (-8 — 1) = +11 *для пустой клетки (Q A)*

S_{23} = 8 - (-8 + 5) = +11 *для пустой клетки (Q, C)*

S_{24} = 0 - (-8 + 0) = +8 *для пустой клетки (Q, фиктивный)*

S_{34} = 0 — (2 + 0) = -2 *для пустой клетки (R, фиктивный)*

Полученные значения заносятся в транспортную таблицу:

Применение метода МОДИ для проверки на оптимальность начального распределения перевозок

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	+11 $\boxed{10}$	+2 $\boxed{20}$	2 $\boxed{5}$	7 $\boxed{0}$	9
Q	+11 $\boxed{2}$	4 $\boxed{10}$	+11 $\boxed{8}$	+8 $\boxed{0}$	4
R	3 $\boxed{1}$	1 $\boxed{20}$	4 $\boxed{7}$	-2 $\boxed{0}$	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Этап 3.Поиск оптимального решения

1. Если транспортная таблица содержит более 1 пустой клетки с отрицательным значением теневой цены, то выбирается та, которой соответствует наибольшее значение по абсолютной величине

2. Строится ступенчатый цикл

3. Выявляются клетки, количество перевозок в которых необходимо сократить

и определение величины этих сокращений таким образом, чтобы ни одно из значений перевозок не оказалось отрицательным

Ступенчатый цикл для (R, фиктивный)

	C	Фиктивный
P	+ $\boxed{5}$ 2	- $\boxed{0}$ 7
R	- $\boxed{7}$ 4	+ $\boxed{0}$ -2

Перераспределение перевозок

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	$\boxed{10}$ -	$\boxed{20}$ -	$\boxed{5}$ 2 + 4	$\boxed{0}$ 7 - 4	9
Q	$\boxed{2}$ -	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{8}$ -	$\boxed{0}$ -	4
R	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{20}$ 1	$\boxed{7}$ 4 -4	$\boxed{0}$ 0 +4	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Проверим данное решение на оптимальность методом МОДИ:

$C_{13} = 5 = u_1 + v_3$ *положим u1 = 0, тогда* $v_3 = 5$

$C_{14} = 0 = u_1 + v_4$ $v_4 = 0$

$C_{34} = 0 = u_3 + v_4$ $u_3 = 0$

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1$ $v_1 = 1$

$C_{32} = 20 = u_3 + v_2$ $v_2 = 20$

$C_{22} = 10 = u_2 + v_2$ $u_2 = -10$

Так, теневые цены соответствующие пустым клеткам будут равны:

$S_{11} = 10 — (0 + 1) = +9$

$S_{12} = 20 — (0 + 20) = 0$

$S_{21} = 2 - (- 10 + 1) = + 11$

$S_{23} = 8 - (- 10 + 5) = + 13$

$S_{24} = 0 - (- 10 + 0) = + 10$

$S_{34} = 7 — (0 + 5) = + 2$

т. к. ни одно из значений теневых цен не отрицательно, полученное решение является оптимальным

Минимальная стоимость равна:

101 + (4*(-2)) = 93

2. Задача о назначениях

Особенность задачи о назначениях:

1. Число пунктов производства равно числу пунктов назначения. Транспортная таблица имеет форму квадрата

2. В каждом пункте назначения объем потребности равен 1. Величина предложения каждого пункта производства равна 1

<u>Этап 2</u>

1. Найти строку, содержащую только 1 нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить 1 элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости

2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца

3. Повторять п.1 и 2 до тех пор, пока продолжение описанной процедуры

окажется невозможным

Этап 3

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице

2. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые

4. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых

5. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения

Пример решения задачи о назначениях

Некоторая компания имеет 4 сбытовые базы и 4 заказа, которые необходимо доставить потребителям. Каждое складское помещение может разместить 1 заказ. Расстояние между складами и потребителями указаны в таблице. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной

Торговая база	Расстояние, миль до потребителей			
	I	II	III	IV
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Выявление наименьших элементов по строкам

Торговая база	Расстояние, миль до потребителей				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Вычитание наименьшего элемента по строкам и выявление наименьшего элемента по столбцам

0	4	7	15
0	4	2	7
3	5	0	10
7	2	0	5
0	2	0	5

Наименьший элемент столбца

Вычитание наименьшего элемента по столбцам

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

Назначение в клетки с нулевыми значениями

$\boxed{0}$	2	7	10
~~0~~	2	2	2
3	3	$\boxed{0}$	5
7	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~

Проведение прямых через нулевые элементы

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

Скорректированная таблица с назначением для нулевых клеток

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	~~0~~	7	8
B	~~0~~	$\boxed{0}$	2	~~0~~
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	~~0~~	2	$\boxed{0}$

Первое альтернативное решение

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	~~0~~	7	8
B	~~0~~	~~0~~	2	$\boxed{0}$
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	$\boxed{0}$	2	~~0~~

Второе альтернативное решение

	I	II	III	IV
A	~~0~~	$\boxed{0}$	7	8
B	$\boxed{0}$	~~0~~	2	~~0~~
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	~~0~~	2	$\boxed{0}$

Минимальная дальность перевозок для каждого из трех решений:

Решение 1: 68 + 60 + 35 + 45 = 208 миль

Решение 2: 68 + 63 + 35 + 42 = 208 миль

Решение 3: 72 + 56 + 35 + 45 = 208 миль

Общая дальность для всех трех решений одинакова

ТЕМА 5 ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1. Динамические модели
2. Сетевая модель

1. Динамические модели

Динамическое модели — это модели позволяющие решать задачи оптимизации управления динамическими системами, и представить процесс оптимизации в виде последовательности отдельных этапов (шагов).

Основу динамических моделей составляет принцип оптимальности, утверждающий, что каков бы ни был путь достижения некоторого состояния системы, последующие решения должны принадлежать оптимальной траектории для оставшейся части пути, начинающейся с этого состояния.

Укажем особенности составления ММ динамического программирования. Дополнительно введем следующие условные обозначения:

s - состояние процесса;

S_i - множество возможных состояний процесса перед i-м шагом;

W_i - выигрыш с i-го шага до конца процесса, $i = \overline{1,m}$.

Основные этапы составления динамической модели

1. Разбиение задачи на шаги (этапы). Шаг не должен быть слишком мелким, чтобы не проводить лишних расчётов и не должен быть слишком большим, усложняющим процесс шаговой оптимизации.
2. Выбор переменных, характеризующих состояние s моделируемого процесса перед каждым шагом, и выявление налагаемых на них ограничений. В качестве таких переменных следует брать факторы, представляющие интерес для исследователя, например, годовую прибыль при планировании деятельности предприятия.
3. Определение множества шаговых управлений x_i, $i = \overline{1,m}$ и налагаемых на них ограничений, т.е. области допустимых управлений X.
4. Определение выигрыша

$$\varphi_i(s, x_i),$$

который принесет на i-м шаге управление x_i, если система перед этим находилась в состоянии s.

1. Определение множества возможных состояний S_m для последнего шага.
2. Проведение условной оптимизации для каждого состояния $s \in S_m$ на последнем m-м шаге по формуле (2.75) и определение условного оптимального управления $x_m(s)$, $s \in S_m$.
3. Определение множества возможных состояний S_i для i-го шага, $i = 2,3,\ldots,m-1$.

5. Определение состояния s', в которое переходит система из состояния s под влиянием управления x_i,

$$s' = f_i(s, x_i), \tag{2.74}$$

где f_i - функция перехода на i-м шаге из состояния s в состояние s'.

6. Составление уравнения, определяющего условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для состояния s моделируемого процесса

$$W_m(s) = \max_{x_m \in X}\{\varphi_m(s, x_m)\}. \tag{2.75}$$

7. Составление основного функционального уравнения динамического программирования, определяющего условный оптимальный выигрыш для данного состояния s с i-го шага и до конца процесса через уже известный условный оптимальный выигрыш с $(i+1)$-го шага и до конца:

$$W_i(s) = \max_{x_m \in X}\{\varphi_i(s, x_i) + W_{i+1}(f_i(s, x_i))\}. \tag{2.76}$$

Этапы решения задач динамического программирования

4. Проведение условной оптимизации i-го шага, $i = 2,3,\ldots,m-1$ для каждого состояния $s \in S_i$ по формуле (2.76) и определение условного оптимального управления $x_i(s)$, $s \in S_i$, $i = 2,3,\ldots,m-1$.

5. Определение начального состояния системы s_1, оптимального выигрыша $W_1(s_1)$ и оптимального управления $x_1(s_1)$ по формуле (2.76) при $i = 1$. Это есть оптимальный выигрыш для всей задачи $W^* = W_1(x_1^*)$.

6. Проведение безусловной оптимизации управления. Для проведения безусловной оптимизации необходимо найденное на первом шаге оптимальное управление $x_1^* = x_1(s_1)$ подставить в формулу (2.74) и определить следующее состояние системы $s_2 = f_2(s_1, x_1^*)$. Для измененного состояния найти оптимальное управление $x_2^* = x_2(s_2)$, подставить в формулу (2.74) и т. д. Для i-го состояния s_i найти $s_{i+1} = f_{i+1}(s_i, x_i^*)$ и $x_{i+1}^*(s_{i+1})$ и т. д.

2. Сетевая модель

<u>Граф</u> – конструкция из вершин и ребер

<u>Вершины</u> – точки

<u>Ребра</u> – соединяющие линии

<u>Граф называется Эйлеровым</u>, если существует путь, позволяющий прийти в ту же вершину, из которой вышли, пройдя по каждому ребру, только один раз.

<u>Граф называется Гамильтоновым</u>, если существует

путь, позволяющий обойти все вершины, заходя в каждую только один раз

Деревом называется граф, любые две вершины которого соединены только одним ребром

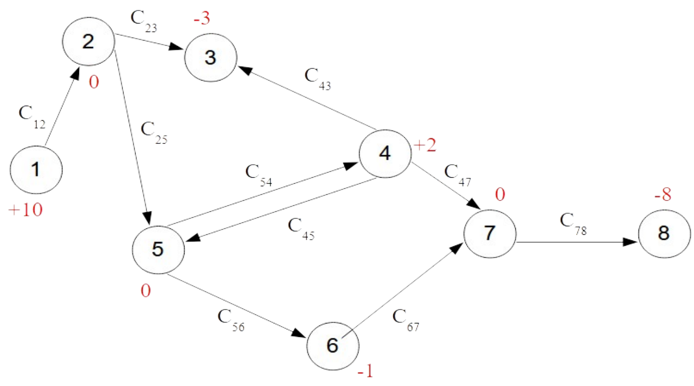


Схема перевозок товаров между складами

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в форме сети, изображение которой называется **сетевым графиком**

Основное назначение Сетевого планирования и управления (СПУ):

- формирование календарного плана реализации комплекса работ;
- принятие эффективных решений в процессе выполнения этого плана

Главные элементы сетевой модели:

- события (обозначаются вершинами графов)
- работы (дуги)

Событие — это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта

Событие исходное (начальное) – не имеет предшествующих работ и событий,

Событие завершающее (конечное) – не имеет последующих работ и событий

Работа может быть трех видов:

1) **действительная работа** – протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов;

2) **ожидание** – протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда;

3) **фиктивная работа (зависимость)** – логическая связь между двумя или несколькими работами, не требующими затрат труда, материальных ресурсов и времени.

Путь - любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за

ней работы.

Полный путь (L) – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется **критическим.**

Критическими называются работы и события, расположенные на критическом пути.

Длина критического пути называется критическим временем (сроком) сетевого графика (Ткр).

Критическое время – это наименьшее

время выполнения всего комплекса работ.

Сетевой график может иметь несколько различных критических путей, но все они имеют одну и ту же длину

2. Правила построения сетевых графиков

1. В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий (из которых не выходит ни одна работа,за исключением завершающего события)

2. В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий (которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного).

3. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, (путей, соединяющих некоторые события с ними же самими)

4. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой.

5. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

6. Сетевой график должен быть упорядочен.

Временные параметры сетевых графиков

Параметры событий:

- ранний срок свершения i-го события

$t_p(j) = max_{i,j}[t_p(i) + t(j,i)]$

- поздний (предельный)срок свершения i-го события

$t_n(i) = min_{i,j}[t_n(j) — t(j,i)]$

- резерв времени R(i)го события

$R(i) = t_n(i) - \ t_p(j)$

Пример решения задачи. Для заданного сетевого графика рассчитать все параметры событий и работ, определить критический путь и его длину

Параметры работ:

- ранний срок $t_{рн}(i,j)$ начала работы (i,j) совпадает с ранним сроком наступления начального события *i:* $\boldsymbol{t_{рн}(i,j) = t_р(i)}$
- ранний срок $t_{ро}(i,j)$ *окончания работы (i,j):*

$\boldsymbol{t_{ро}(i,j) = t_р(i) + t(j,j)}$

- поздний срок $t_{по}$(i,j) окончания работы (i,j) совпадает с поздним сроком конечного события

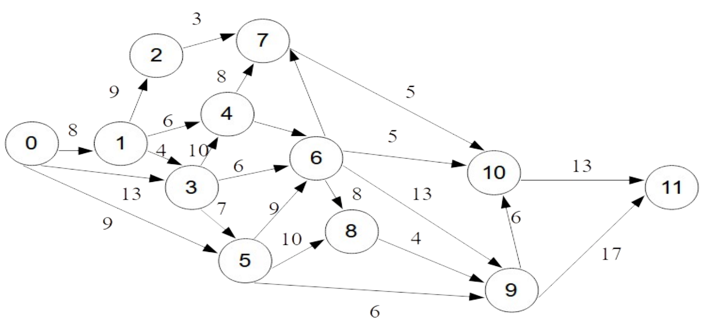
$\boldsymbol{t_{по}(i,j) = t_n(j)}$

- поздний срок $t_{пн}(i,j)$ начала работы (j,j):

$\boldsymbol{t_{пн}(i,j) = t_n(i) — t(i,j)}$

- резерв времени пути $\boldsymbol{R(L) = t_{кр} - t(L)}$

Параметры событий сетевого графика



Номер события	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ранний срок	0	8	17	13	23	20	29	33	37	42	48	61
Поздний срок	0	9	40	13	26	20	29	43	38	42	48	61
Резерв времени	0	1	23	0	3	0	0	10	1	0	0	0

Критический путь образуют следующие события

0 → 3 → 5 → 6 → 9 → 10 → 11.

Всего продолжительность составляет 61 день

№	Работа	Продолжительность работ (i,j)	Сроки начала и окончания работ				Резерв времени $R_n(i,j)$
			$t_{рн}(i,j)$	$t_{ро}(i,j)$	$t_{пн}(i,j)$	$t_{по}(i,j)$	
1	(0, 1)	8	0	8	1	9	1
2	(0, 3)	13	0	13	0	13	0
3	(0, 5)	9	0	9	11	20	11
4	(1, 2)	9	8	17	31	40	23
5	(1, 4)	6	8	14	20	26	12
6	(1, 3)	4	8	12	9	13	1
7	(2, 7)	3	17	20	40	43	23
8	(3, 4)	10	13	23	16	26	3
9	(3,5)	7	13	20	13	20	0
10	(3,6)	6	13	19	23	29	10
11	(4,7)	8	23	31	35	43	12
12	(4,6)	3	23	26	26	29	3
13	(5,6)	9	20	29	20	29	0
14	(5,8)	10	20	30	28	38	8
15	(5,9)	6	20	26	36	42	16
16	(6,7)	4	29	33	39	43	10
17	(6,10)	5	29	34	43	48	14
18	(6, 9)	13	29	42	29	42	0
19	(6, 8)	8	29	37	30	38	1
20	(7, 10)	5	33	38	43	48	10
21	(8, 9)	4	37	41	38	42	1
22	(9, 10)	6	42	48	42	48	0
23	(9, 11)	17	42	59	44	61	2
24	(10,11)	13	48	61	48	61	0

Коэффициентом напряженности *К н* работы (i,j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

t(Lmax) — t'кр

Кн (i,i) = tкр — t'кр

Где t(Lmax) — продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i,j)

Tкр — продолжительность (длина) критического пути

T'кр — продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем

Rn(i,j)

Кн (I,j) = 1- tкр — t'кр

Rn (i,j) - полный резерв времени работ (i,j)

Коэффициент напряженности показывает степень трудности выполнения в срок каждой группы работ некритического пути.

ТЕМА 6 МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

1. Задачи принятия решений в условиях неопределённости
2. Основные понятия теории игр
3. Классические критерии теории максимина
4. Основные понятия стохастических моделей
5. Системы массового обслуживания
6. Метод статистических испытаний

1. Задачи принятия решений в условиях неопределённости

В детерминированных задачах ИО показатель эффективности W зависит только от двух групп факторов: заданных, заранее известных α и элементов решения x. Реальные задачи исследования операций содержат помимо этих двух групп еще одну - неизвестные факторы, которые в совокупности обозначим переменой ζ . Итак, показатель эффективности W зависит от всех трех групп факторов:

$$W(\alpha, x, \varsigma).$$

Так как величина W зависит от неизвестных факторов ς , то даже при заданных α и x она уже не может быть вычислена и остаётся неопределенной. Задача поиска оптимального решения тоже теряет определенность. В явном виде максимизировать неизвестную величину W невозможно.

Изменим формулировку задачи. При заданных условиях α с учетом неизвестных факторов ς требуется найти такое решение $x \in X$, которое, по возможности, обеспечивает максимальное значение показателя эффективности W.

Наличие неопределенных факторов ς переводит задачу в новое качество: она превращается в задачу о выборе решения в условиях неопределенности.

Если условия операции неизвестны, то невозможно оптимизировать решение, чего удаётся добиться при наличии необходимой информации. Отметим, что любое решение, принятое в условиях неопределенности, безусловно, хуже решения, принятого в заранее известных условиях.

Задача принятия решения в условиях неопределенности на каждом шагу встречается нам в жизни. Характерным примером является приятие финансовых решений на фондовой бирже и на конкурсе инновационных проектов.

Для того чтобы управленческие решения в условиях неопределённости принимать обоснованно, современная наука располагает рядом приемов. Каким из них воспользоваться - зависит от того, какова природа неизвестных факторов ς , откуда они возникают и кем контролируются.

Прежде всего, рассмотрим наиболее благоприятный для исследования вид частичной неопределенности. Это случай, когда неизвестные факторы ς представляют собой обычные объекты изучения теории вероятностей - случайные величины (или случайные функции), статистические характеристики которых известны или в принципе могут быть получены одним из известных способов. Такие задачи исследования операций будем называть стохастическими задачами, а присущую им неопределенность - стохастической неопределенностью.

Приведем пример стохастической задачи исследования операций. Организуется система технического обслуживания автотранспортных средств личного пользования с целью снижения аварийных отказов и уменьшения простоев техники за счет неисправностей и ремонтов. Отказы подсистем автомобилей отечественного производства, длительности ремонтов и профилактик носят случайный характер. Характеристики всех случайных факторов, входящих в задачу, могут быть получены, если собрать соответствующую статистику.

Рассмотрим более подробно вид стохастической неопределенности. Пусть неизвестные факторы ς представляют собой случайные величины с какими-то, в принципе известными, вероятностными характеристиками - законами распределения вероятностей, математическими ожиданиями, дисперсиями и т. п. Тогда показатель эффективности W, зависящий от этих факторов, тоже будет величиной случайной. Максимизировать случайную величину невозможно: при любом решении x она остается случайной, неконтролируемой. Поэтому один из приёмов состоит в том, что случайные факторы ς заменяют средними значениями (математическими ожиданиями). Тогда задача становится детерминированной и может быть решена обычными методами.

В тех случаях, когда влияние случайности на интересующий исход операции является существенным, указанный переход к детерминированной задаче неправомерен.

Рассмотрим такую операцию Q, где факторы ς существенно случайны и заметно влияют на показатель эффективности W, который представляет собой функционал.

Возникает мысль: надо взять в качестве показателя эффективности среднее значение (математическое ожидание) этой случайной величины W = M [W]и выбрать такое решение x, при котором этот усредненный по условиям показатель обращается в максимум:

$$W = M\,[W(a,x,\varsigma)] \rightarrow \max \qquad (5.2)$$

В большинстве случаев такой подход, который назовем «оптимизацией в среднем», вполне оправдан. А как же с элементом неопределенности? Конечно, в какой-то мере он сохраняется. Эффективность каждой отдельной операции, проводимой при конкретных значениях случайных факторов ς , может сильно отличаться от ожидаемой как в большую, так и в меньшую сторону. Такая «оптимизация в среднем» часто применяется на практике в стохастических задачах исследования операций. Чтобы этот прием был законным, нужно, чтобы операция обладала свойством повторяемости, и недостаток информации о значениях и динамике показателя эффективности можно было бы компенсировать за счёт статистических данных. Например, если мы предпринимаем длинный ряд однородных операций, с целью получить максимальный доход, то доходы от отдельных операций суммируются, «минус» в одном случае покрывается «плюсом» в другом.

Особенно осторожным надо быть с «оптимизацией в среднем», когда речь идет не о повторяемой, массовой операции, а о единичной, «уникальной». Все зависит от того, к каким последствиям может привести неудача данной операции, т.е. слишком малое значение показателя эффективности W; иногда оно может означать попросту катастрофу.

Стохастическая неопределенность - это почти определенность, если только известны вероятностные характеристики входящих в задачу случайных факторов. Гораздо хуже обстоит дело, когда неизвестные факторы ς не могут быть изучены и описаны статистическими методами. Это бывает в двух случаях:

а) распределение вероятностей для параметров ς в принципе существует, но к моменту принятия решения не может быть получено;

б) распределение вероятностей для параметров ς вообще не существует.

Пример ситуации типа а): проектируется информационно-вычислительная система, предназначенная для обслуживания каких-то случайных потоков требований (запросов). Вероятностные характеристики этих потоков требований в принципе могли бы быть получены из статистики, если бы данная ИВС (или аналогичная ей) уже существовала и функционировала достаточно долгое время. Рекомендуется применить следующий прием: оставить некоторые элементы решения x свободными, изменяемыми. Затем выбрать для начала какой-то вариант решения, зная заведомо, что он не самый лучший, и пустить систему в ход, а потом, по мере накопления опыта, целенаправленно изменять свободные параметры решения, добиваясь того, чтобы эффективность, не уменьшалась, а увеличивалась. Такие совершенствующиеся в процессе применения алгоритмы управления называются адаптивными. Преимущество адаптивных алгоритмов в том, что они не только избавляют от предварительного сбора статистики, но и перестраиваются в ответ на изменение обстановки. По мере накопления опыта такой алгоритм постепенно улучшается.

Обратимся к случаю, когда у неопределенных факторов ς вообще не существует вероятностных характеристик; другими словами, когда их нельзя считать «случайными» в обычном смысле слова.

Поясним, что под термином «случайное явление» в теории вероятностей принято понимать явление, относящееся к классу повторяемых и, главное, обладающее свойством статистической устойчивости. При повторении однородных опытов, исход которых случаен, их средние характеристики проявляют тенденцию к устойчивости, стабилизируются. Частоты событий приближаются к их вероятностям, средние арифметические - к математическим ожиданиям.

Выделим случай полной неопределенности, когда факторы ς заранее неизвестны, не имеет смысла говорить об их «законах распределения» или других вероятностных характеристиках.

Пусть выбирается решение x в некоторой операции Q, об условиях которой полностью отсутствуют сведения, можно сделать лишь предположения. Зададим какие-то, более или менее правдоподобные, значения параметров ς . Тогда задача перейдет в категорию детерминированных и может быть решена обычными методами.

Будет ли найденное решение корректным для других условий ς ? Как правило, нет. Поэтому ценность его - сугубо ограниченная. В данном случае разумно будет выбрать не решение x, оптимальное для каких-то условий ς , а некое компромиссное решение, которое, не будучи оптимальным, может быть, ни для каких условий, будет все же приемлемым в целом их диапазоне.

В настоящее время полноценной научной теории компромисса не существует, хотя некоторые попытки в этом направлении в теории игр и статистических решений делаются. Обычно окончательный выбор компромиссного решения осуществляется человеком. Опираясь на предварительные расчеты, в ходе которых решается большое число прямых задач исследования операций для разных условий ς и разных вариантов решения x, он может оценить сильные и слабые стороны каждого варианта и на этой основе сделать выбор. Для этого необязательно знать точный «условный» оптимум для каждой совокупности условий ς . Математические вариационные методы в данном случае отступают на задний план.

Подчеркнем еще одну полезную функцию предварительных математических расчетов в задачах с полной неопределенностью»: они помогают заранее отбросить те решения $x \in X$, которые при любых условиях ς уступают другим, т. е. оказываются неконкурентоспособными. В ряде случаев это помогает существенно сузить множество X , иногда - свести его к небольшому числу вариантов, которые легко могут быть просмотрены и оценены человеком в поисках удачного компромисса.

При рассмотрении задач с полной неопределенностью полезно сравнивать разные подходы, разные точки зрения. Выделим так называемую позицию крайнего пессимизма. Она сводится к тому, что, принимая решение в условиях полной неопределенности, надо всегда рассчитывать на худшее и принимать то решение, которое дает максимальный эффект в наихудших условиях. Если в этих условиях мы получаем выигрыш $W= W$, то можно гарантировать, что в любых других выигрыш будет не меньше. Принцип гарантированного результата привлекателен тем, что дает четкую постановку задачи оптимизации и возможность ее решения корректными математическими методами. Область его применения - по преимуществу так называемые «конфликтные ситуации», в которых условия зависят от сознательно действующего лица («разумного противника»), отвечающего на любое решение наихудшим для нас образом.

В нейтральных ситуациях принцип «гарантированного выигрыша» не является единственно возможным, но может быть рассмотрен наряду с другими. Пользуясь им, нельзя забывать, что эта точка зрения - крайняя, что на ее основе можно выбрать осторожное, «перестраховочное» решение, которое не всегда будет разумным. Можно представить себе, например, руководителя фирмы, который всякое свое решение будет принимать исходя из гипотезы, что его конкурент необычайно умен, хитер и изворотлив и на каждое его действие немедленно ответит наихудшим для него образом. Вряд ли такому руководителю будет сопутствовать удача. Напротив, в любой конкретной ситуации нужно стараться угадать, в чем слаб и некомпетентен конкурент, и стараться «обвести его вокруг пальца». Тем менее уместен крайне пессимистический подход в ситуациях, где стороне, принимающей решение, не противостоят никакие враждебные силы. Расчеты, основанные на точке зрения «крайнего пессимизма», всегда должны корректироваться разумной долей оптимизма.

Известен в теории принятия решений *метод экспертных оценок*. Он часто применяется в задачах, связанных с прогнозированием в условиях полной неопределённости, например при оценке инновационных проектов по нескольким показателям. Идея метода сводится к следующему: собирается коллектив сведущих, компетентных в данной области людей, и каждому из них предлагается ответить на группу вопросов. Затем полученные ответы обрабатываются наподобие статистического материала. Результаты обработки, разумеется, сохраняют субъективный характер, но в гораздо меньшей степени, чем, если бы мнение высказывал один эксперт. Подобного рода экспертные оценки для неизвестных условий могут быть применены при решении задач исследования операций при полной неопределённости. Каждый из экспертов на глаз оценивает степень правдоподобия различных вариантов условий ς , приписывая им какие-то субъективные вероятности. Несмотря на субъективный характер оценок каждого эксперта, усредняя оценки целого коллектива, можно получить нечто, болев объективное и полезное (кстати, оценки разных экспертов расходятся не так сильно, как можно было бы ожидать). Таким образом, задача сводится к классической стохастической задаче.

Сделаем одно общее замечание. При обосновании решения в условиях неопределенности, что элемент неопределенности сохраняется. Поэтому нельзя предъявлять к точности решений слишком высокие требования. Вместо того чтобы указать одно-единственное, в точности «оптимальное» (с какой-то точки зрения) решение, лучше выделить целую область «приемлемых» решений, которые оказываются несущественно хуже других, какой бы точкой зрения мы ни пользовались. В пределах этой области и должны производить свой окончательный выбор ответственные за это люди. Исследователь, предлагая им рекомендации по выбору решения, всегда должен одновременно указывать точки зрения, из которых вытекают те или другие рекомендации.

2. Основные понятия теории игр

Ситуация называется конфликтной, если в ней сталкиваются интересы нескольких (обычно двух) лиц, преследующих противоположные цели. Каждая из сторон может проводить ряд мероприятий для достижения своих целей, причем успех одной стороны, как правило, означает неудачу (проигрыш) другой. Авторами первого фундаментального работы по теории игр Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн /1944 г./ («Теория игр и экономическое поведение» - М. Наука, 1970). Теория разрабатывалась применительно к анализу конфликтных ситуаций в вопросах экономики, когда при наличии свободной конкуренции в роли борющихся сторон выступают торговые фирмы, промышленные предприятия и т. п. Укажем примеры конфликтных ситуаций, связанных с принятием решения в условиях неопределенности:

1. Выбор рационального варианта обслуживания клиентов банка;
2. Выбор метода решения задачи анализа (синтеза) в условиях неполноты исходных данных или некорректной постановки задачи;
3. Обоснование рациональной структуры портфеля заказов;
4. Задача выбора оптимального способа презентации;
5. Многоальтернативные выборы в парламент;
6. Арбитражные споры;
7. Спортивные состязания.

Упрощенная формализованная модель конфликтной ситуации называется игрой, а конфликтующие стороны - игроками. В дальнейшем ограничимся рассмотрением парных игр, в которых участвуют только две конфликтующие стороны. Следует различать понятия игры и понятие индивидуальной партии игры. Игра представляет собой совокупность правил, описывающих поведение игроков. Каждый случай разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала и до конца представляет собой партию игры. Элементами игры являются ходы. Правила игры предусматривают, какова должна быть последовательность ходов, и указывают характер каждого хода. Ходы бывают личные и случайные. Личный ход представляет собой выбор игроком одного из заданного множества вариантов. Решение, принятое игроком при личном ходе, называется выбором. Случайный ход –

это выбор одного из множества вариантов с помощью специального механизма случайного выбора (пример случайных ходов – бросание монеты, сдача карт, бросание кубика с метками). Выбор, осуществляемый при случайном ходе, называется исходом этого хода.

Структура правил игры:

1. Для первого хода указывается: будет это личный или случайный ход.

а) для личного хода: указываются имеющиеся варианты и номер игрока, который делает выбор;

б) для случайного хода: перечисляются имеющиеся варианты и вероятности их выбора.

2. Для каждого следующего хода правила определяют в зависимости от выборов и исходов предыдущих ходов:

а) будет этот ход личным или случайным;

б) для личного хода: выделяется игрок, который делает выбор; возможные варианты, из которых делается выбор; информация относительно выборов и исходов предыдущих ходов.

3. Определяются в зависимости от выборов и исходов, следующих друг за другом ходов (в зависимости от хода игры):

а) условия окончания игры;

б) методику подсчета выигрыша (проигрыша) каждого из игроков.

Стратегия игрока представляет собой однозначное описание его выбора в каждой возможной ситуации, при которой он должен сделать личный ход. Если игра состоит только из личных ходов, то исход игры будет определен, если каждый из игроков выбрал свою стратегию. Однако если в игре имеются случайные ходы, то игра будет носить вероятностный характер и выбор стратегий игроков еще не определит окончательный исход игры.

Формальное описание игры двух лиц

Пусть рассматривается парная игра. Обозначим через A и B множества или пространства возможных стратегий, которыми могут пользоваться первый и второй игроки. Величины $a \in A$ и $b \in B$ будут означать конкретные стратегии первого и второго игроков. Для удобства введения в рассмотрение случайных ходов будем считать, что в игре принимает участие третий игрок, который и делает случайные ходы, пользуясь для этого соответствующим механизмом случайного выбора. Обозначим через H пространство стратегий этого игрока. Любая стратегия $h \in H$ третьего игрока, представляющая собой конкретную последовательность всех случайных ходов в партии, будет происходить с некоторой вероятностью P(h), которую легко подсчитать, зная вероятности каждого случайного хода в этой последовательности. P(h) представляет собой распределение вероятностей на пространстве H, т.е. удовлетворяет условиям

$$P(h) \geq 0; \qquad \sum p(h) = 1$$

. Обозначим через q некоторый вариант игры (одну возможную партию). Этот вариант будет определен, если выбраны стратегии игроков a и b и стратегия случайных ходов h. Следовательно, конкретная партия q представляет собой тройку величин: q(a, b, h). Результатом партии является выигрыш или проигрыш каждого из игроков. Для удобства выигрыши и проигрыши будем оценивать каким-либо числом.

3. Классические критерии теории максимина

Рассмотрим группу классических критериев (теории максимина) принятия решений в условиях неопределенности (без проведения экспериментов).

1. Максиминный критерий Вальда (крайнего пессимизма) Согласно данного критерия выбирается стратегия, для которой min выигрыш максимален

$W = \max_i \min_j C_{ij}$

2. Минимаксный критерий Севиджа

$S = \min_i \max_j r_{ij}$

Выбирается та стратегия ai, при которой min является величиной риска rij в самой неблагоприятной ситуации игры с природой.

3. **Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица**. Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом. Согласно этому критерию стратегия в матрице C выбирается в соответствии со значением

$Hc = \max \{ x \cdot \min c_{ij} + (1-x) \cdot \max c_{ij} \}$

При x=0 критерий Гурвица совпадает с максимаксным критерием, а при x=1 - с критерием Вальда.

Покажем процедуру применения данного критерия для матрицы С (5.1) при x=0,5:

- для первой стратегии (i = 1) $H_1 = 0{,}5\ (\min c_{ij} + \max c_{ij}) = 5$
- для второй стратегии (I = 2) $H_2 = 0{,}5\ (\min c_{ij} + \max c_{ij}) = 5{,}5$
- для третьей стратегии (I = 3) $H_3 = 0{,}5\ (\min c_{ij} + \max c_{ij}) = 4$

Тогда $Hc = \max \{0{,}5 \cdot (\min c_{ij} + \max c_{ij})\} = 5{,}5$, т. е. оптимальной является вторая стратегия A_2 .

Применительно к матрице рисков R критерий пессимизма-оптимизма Гурвица имеет вид:

$H_r = \max \{x \cdot \min r_{ij} + (1\text{-}x) \cdot \max r_{ij}\}$.

При x=0 выбор стратегии игрока 1 осуществляется по условию наименьшего из всех возможных рисков ($\min r_{ij}$); при x=1 - по критерию минимаксного риска Севиджа. В случае, когда по принятому критерию рекомендуется к использованию несколько стратегий, выбор между ними может делаться по дополнительному критерию, например в расчет могут приниматься средние квадратичные отклонения от средних выигрышей при каждой стратегии. На практике выбор существенно зависит от склонности ЛПР к риску. В заключение приведем результаты применения рассмотренных выше критериев на примере следующей матрицы выигрышей:

$$C = \begin{array}{c|cccc} & B1 & B2 & B3 & B4 \\ \hline A1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{array}$$

Для игрока 1 лучшими являются стратегии:

- по критерию Вальда – A_3 ;
- по критерию Сэвиджа – A_2 и A_3 ;

- по критерию Гурвица (при x = 0,6) – A_3;
- по критерию максимакса – A_4 .

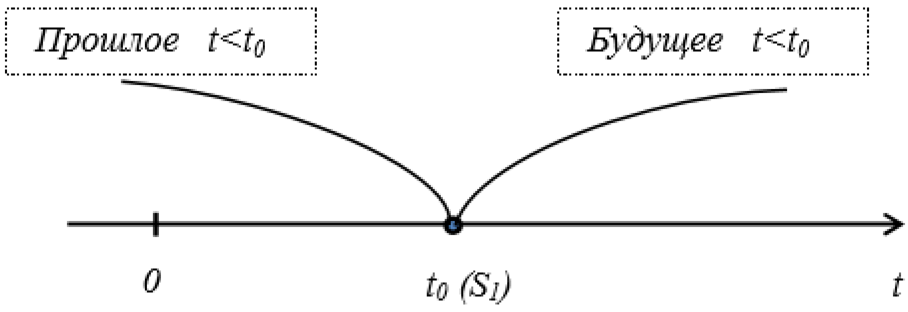
Поскольку стратегия А3, фигурирует в качестве оптимальной по трем критериям выбора из четырех испытанных, степень её надежности можно признать достаточно высокой для того, чтобы рекомендовать эту стратегию к практическому применению. Таким образом, в случае отсутствия информации о вероятностях состоянии среды теория игр не дает однозначных и математически строгих рекомендаций по выбору критериев принятия решений. Это объясняется в большей мере не слабостью теории, а неопределенностью самой ситуации. Единственный разумный выход в подобных случаях - попытаться получить дополнительную информацию, например, путем проведения исследований или экспериментов. В отсутствие дополнительной информации принимаемые решения теоретически недостаточно обоснованы и в значительной мере субъективны. Хотя применение математических методов в играх с природой не дает абсолютно достоверного результата и последний в определенной степени является субъективным (вследствие произвольности выбора критерия принятия решения), оно тем не менее создает некоторое упорядочение имеющихся в распоряжении ЛПР данных: задаются множество состояний природы, альтернативные решения, выигрыши и потери при различных сочетаниях состояния «среда - решение». Такое упорядочение представлений о проблеме само по себе способствует повышению качества анализа альтернатив и обоснования принимаемых решений.

4. Основные понятия стохастических моделей

Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причем заранее неизвестным, случайным образом. Тогда мы будем говорить, что в системе S протекает ***случайный процесс.***

Случайным процессом X (t) называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной $X(t_0)$. Случайная величина $X(t_0)$, в которую обращается случайный процесс при $t = t_0$, называется ***сечением случайного процесса***, соответствующим данному значению аргумента t.

Под ***«физической системой»*** можно понимать что угодно: офис банка, конвейер, информационно-справочную систему, торговую точку, страховую компанию, предприятие, отрасль промышленности, выставочный зал и т. д. Большинству процессов, протекающих в реальных экономических системах, свойственны, в той или иной мере, черты случайности, неопределенности.



Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пусть в настоящий момент t_0 система находится в определенном состоянии So. Мы наблюдаем процесс со стороны и в момент t_0 знаем состояние системы S_o и всю предысторию процесса, все, что было при $t < t_0$. Нас, естественно, интересует будущее ($t > t_0$).

Для марковского случайного процесса «вероятностное предсказание» оказывается гораздо проще, чем для немарковского. Если процесс - марковский, то предсказывать можно, учитывая только настоящее состояние системы S0 и забыв о его «предыстории» (поведении системы при $t < t_0$). Само состояние S, разумеется, зависит от прошлого, но как только оно достигнуто, характеристики системы в прошлом можно не учитывать. Другими словами, в марковском процессе «будущее зависит от прошлого только через настоящее».

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются, они являются идеализацией реальных процессов. Однако, на практике приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. При количественном анализе таких процессов полезными являются марковские модели. В исследовании операций большое значение имеют так называемые марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния S1, S2, S3,... можно заранее перечислить (перенумеровать), и переход системы из состояния в состояние происходит «скачком», практически мгновенно. Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны, если переход может осуществиться, в принципе, в любой момент. Будем рассматривать только процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Если процесс, протекающий в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, является марковским, то для его описания можно построить довольно простую математическую модель.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Например: поток заказов на доставку товаров; поток железнодорожных составов, поступающих на сортировочную станцию; поток квартир, выставляемых на продажу и т.д. Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени O_t (рис. 4.3); при этом положение каждой из них случайно, и на рисунке изображена только какая-то одна реализация потока.

В теории вероятностей «событием» (или «случайным событием») называется какой-то исход опыта, обладающий той или другой вероятностью. События, образующие поток, сами по себе вероятностями не обладают; вероятностями обладают другие, производные от них события, например: «на участок времени τ (рис. 4.3) попадет ровно два события», или «на участок времени Δt попадет хотя бы одно событие», или «промежуток времени между двумя соседними событиями будет не меньше t». Важной характеристикой потока событий является его интенсивность λ - среднее число событий, приходящееся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной (λ = const), так и переменной, зависящей от времени t. Например, поток посетителей супермаркета в предвыходные дни интенсивнее, чем в будние дни. Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные, равные промежутки времени. На практике чаще встречаются потоки не регулярные, со случайными интервалами.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность λ стационарного потока должна быть постоянной. Это отнюдь не значит, что фактическое число событий, появляющееся в единицу времени, постоянно, - нет, поток неизбежно (если только он не регулярный) имеет какие-то случайные сгущения и разрежения, как, например, показано на рис. 4.3. Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера: на один участок единичной длины может попасть больше, а на другой - меньше событий, но среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

Как правило, отклонения от стационарности могут быть объяснены какими-то физическими причинами. Например, естественно, интенсивность потока

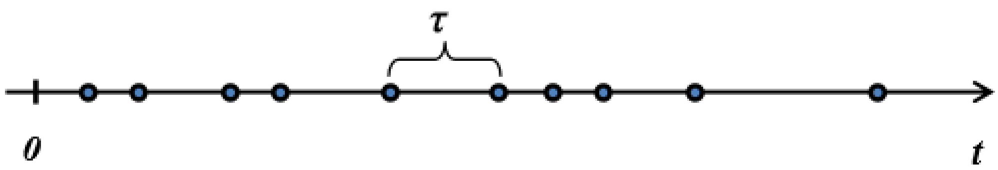


Рис. 4.3

клиентов салона мод, утром меньше, чем днем и вечером. Увеличение интенсивности потока покупателей, приходящих в магазин, в часы после окончания рабочего дня тоже имеет физическое объяснение. Если поток событий имеет тенденцию к явно выраженным сгущениям и разрежениям (особенно периодическим), можно сформулировать гипотезу о закономерности и постараться найти физическую причину, объясняющую данную закономерность. На практике часто встречаются потоки событий, которые (по крайней мере на ограниченном участке времени) могут считаться стационарными. Например, поток вызовов, поступающих к диспетчеру такси между 10 и 12 часами, практически стационарен; тот же поток в течение суток уже не стационарен.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ1 и τ2 (см. рис. 4.4) число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. По сути это означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга, вызванные каждое своими собственными причинами. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А вот поток покупателей, отходящих от прилавка с купленными товарами, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал по времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время t0 обслуживания каждого из них).

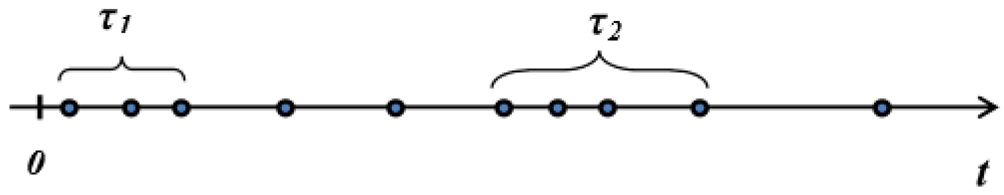


Рис. 4.4

Аналогично обстоит дело и с потоком поездов, подходящих к станции (между ними всегда существует какой-то минимальный интервал t_0, выбираемый из соображений безопасности). Впрочем, если минимальный интервал между событиями много меньше среднего интервала между ними $t = 1/\lambda$,, иногда наличием последействия можно пренебречь. Поток событий называется ординарным, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по нескольку сразу.

Например, поток юридических лиц, обращающихся за услугами в консалтинговую фирму, обычно ординарен, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в банк в первой декаде месяца для получения пенсии. Поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов - неординарен. Если поток событий ординарен, то вероятностью попадания на малый участок времени Δt двух или более событий можно пренебречь.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он обладает сразу тремя свойствами: стационарен, связанные с простейшими потоками, имеют наиболее простое математическое описание. Отметим, самый простой, на первый взгляд, регулярный поток не является «простейшим», так как обладает последействием: моменты появления событий в таком потоке связаны жесткой, функциональной зависимостью. Без специальных усилий по поддержанию его регулярности такой поток обычно не создается.

В расчетах, связанных с потоками событий, удобно пользоваться понятием «элемента вероятности». Рассмотрим на оси Ot простейший поток с интенсивностью λ и произвольно расположенный участок времени Δt. Элементом вероятности называется вероятность попадания на этот участок хотя бы одного события потока. Легко доказать, что элемент вероятности (с точностью до малых величин более высокого порядка по сравнению с Δt) равен

$$p_{\Delta t} = \lambda * \Delta t , \qquad (4.4)$$

т.е. для простейшего потока элемент вероятности равен интенсивности потока, умноженной на длину элементарного участка. Заметим, что элемент вероятности, в силу отсутствия последействия, совершенно не зависит от того, сколько событий и когда появлялись ранее. Отметим, что с точностью до величин высшего порядка малости вероятность появления хотя бы одного события на элементарном участке Δt равна вероятности появления ровно одного события на этом участке. Это вытекает из ординарности простейшего потока.

Поток событий называется рекуррентным (иначе - «потоком Пальма»), если он стационарен, ординарен, а интервалы времени между событиями T1, T2, T3, ... (рис. 4.6) представляют собой независимые случайные величины с одинаковым произвольным распределением (например, с плотностью, показанной на рис.4.7).

Приведем пример рекуррентного потока. Транспортный робот на конвейере работает непрерывно до своего отказа (выхода из строя); отказавший элемент оперативно заменяется новым. Если отдельные экземпляры элемента выходят из строя независимо друг от друга, то поток отказов (он же поток «замен» или «восстановлений») будет рекуррентным.

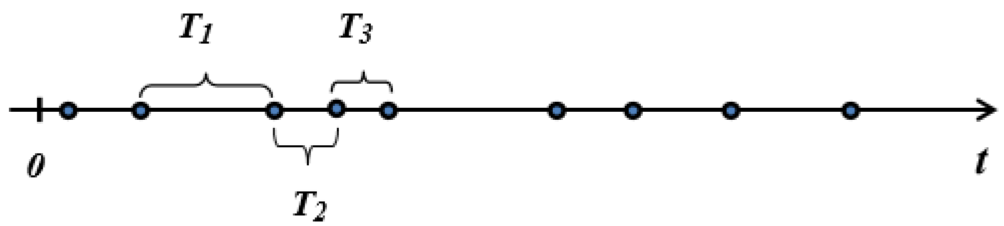


Рис. 4.6

Другой пример.

Менеджер торгового зала непрерывно занят обслуживанием покупателей (как это бывает в часы максимальной нагрузки). Обслуживание покупателя продолжается случайное время T. Тогда поток обслуженных покупателей будет рекуррентным (если считать, что времена обслуживания отдельных покупателей независимы и, например, настойчивость одного из клиентов не скажется на времени обслуживания других).

Очевидно, простейший поток представляет собой частный случай рекуррентного потока, когда интервалы между событиями имеют показательное распределение (4.1). Другим частным (вырожденным) случаем рекуррентного потока является регулярный поток событий, где интервалы вообще не случайны, постоянны.

- **Системы массового обслуживания**

Сущность и классификация систем массового обслуживания

На практике часто приходится сталкиваться с работой систем организационного управления, в которых имеют место повторяющиеся процессы обслуживания однородных объектов. Такие системы в исследовании операций называют системами массового обслуживания (СМО). В качестве примеров СМО можно указать: офис банка, в котором обслуживаются клиенты, справочные бюро, супермаркеты и т.п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (или «приборов»), которые называют каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, продавцы, лифты, автомашины и др. В зависимости от числа каналов обслуживания различают одноканальные и многоканальные СМО. Всякая СМО предназначена для обслуживания потока заявок (или «требований»), поступающих в случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается, в общем случае, случайное время Тоб , после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

СМО можно рассматривать как аналитическую модель реально существующей системы в терминах теории массового обслуживания. Исследования, проводимые на такой модели, имеют целью изучение процесса функционирования реальной системы, определение характеристик системы, которые обеспечивают заданное качество её функционирования. СМО включает в себя входящий поток требований (заявок, вызовов, клиентов), нуждающихся в «обслуживании», и механизм (алгоритм), осуществляющий это «обслуживание».

Теория **массового обслуживания (ТМО)** представляет собой раздел теории вероятностей, изучающий потоки требований на обслуживание, поступающие в системы обслуживания и выходящие из них, а также характеристики обслуживания и их зависимость от правил (дисциплины) обслуживания. Целью исследования являются рациональный выбор структуры системы обслуживания и характеристик процесса обслуживания.

Предмет теории массового обслуживания - построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками - показателями эффективности СМО, описывающими, с той или другой точки зрения, ее способность справляться с потоком заявок.

В качестве таких показателей (в зависимости от обстановки и целей исследования) могут применяться разные величины, например:

- среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени;
- среднее число занятых каналов;
- среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания;
- вероятность того, что число заявок в очереди превысит каков-то значение, и т. д.

Среди заданных условий работы СМО специально не выделяют элементов решения: ими могут быть, например, число каналов, их производительность, режим работы СМО и т.д. Важно уметь решать прямые задачи ИО, а обратные - ставятся и решаются в зависимости от того, какие именно параметры нужно выбирать или изменять. Общей особенностью всех задач, рассматриваемых в ТМО, является случайный характер исследуемых явлений и наличие повторяющихся алгоритмов обработки заявок.

Математический анализ работы СМО существенно облегчается, если процесс работы представляет собой марковский процесс. Для этого достаточно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, потоки «обслуживании»), были простейшими. Если это свойство нарушается, то математическое описание процесса становится гораздо сложнее и довести его до явных, аналитических формул удается лишь в редких случаях. Аппарат марковской теории массового обслуживания полезен для приближенного описания работы СМО даже в тех случаях, когда потоки событий - не простейшие. Во многих случаях для принятия разумного решения по организации работы СМО вовсе и не требуется точного знания всех ее характеристик - зачастую достаточно и приближенного, ориентировочного.

Системы массового обслуживания делятся на типы (или классы) по ряду признаков.

Первое деление:

- СМО с отказами и

- СМО с очередью.

В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

Примеры СМО с отказами встречаются в телефонии: заявка на разговор, пришедшая в момент, когда все каналы связи заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной.

В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходят, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной. На практике чаще встречаются (и имеют большее значение) СМО с очередью; недаром теория массового обслуживания имеет второе название: «теория очередей».

СМО с очередью подразделяются на разные виды, в зависимости от того, как организована очередь - ограничена она или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания (так называемые «СМО с нетерпеливыми заявками»).

При анализе СМО должна учитываться также и «дисциплина обслуживания» - заявки могут обслуживаться либо в порядке поступления (раньше пришла, раньше обслуживается), либо в случайном порядке. Нередко встречается так называемое обслуживание с приоритетом — некоторые заявки обслуживаются вне очереди. Приоритет может быть как абсолютным - когда заявка с более высоким приоритетом «вытесняет» из-под обслуживания заявку с низшим (например, пришедший в парикмахерскую клиент высокого ранга прогоняет с кресла обыкновенного клиента), так и относительным - когда начатое обслуживание доводится до конца, а заявка с более высоким приоритетом имеет лишь право на лучшее место в очереди.

Существуют СМО с так называемым многофазовым обслуживанием, состоящим из нескольких последовательных этапов или «фаз» (например, покупатель, пришедший в магазин, должен сначала выбрать товар, затем оплатить его в кассе, затем получить на контроле).

Кроме этих признаков, СМО делятся на два класса:

«открытые»

и «замкнутые».

В открытой СМО характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии сама СМО (сколько каналов занято). В замкнутой СМО - зависят. Например, если один рабочий обслуживает группу станков, время от времени требующих наладки, то интенсивность потока «требований» со стороны станков зависит от того, сколько их уже неисправно и ждет наладки. Это - пример замкнутой СМО. Классификация СМО далеко не ограничивается приведенными их разновидностями, но мы ограничимся ими.

Оптимизация работы СМО может производиться с разных позиций:

с точки зрения организаторов (или владельцев) СМО или

с точки зрения обслуживаемых клиентов.

С первой точки зрения желательно «выжать все, что возможно» из СМО и добиться того, чтобы ее каналы были предельно загружены. С точки зрения клиентов желательно всемерное уменьшение очередей, которые зачастую приводят к бессмысленной трате сил и времени и, в конечном итоге, к понижению производительности труда.

При решении задач оптимизации в теории массового обслуживания необходим системный подход, полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов СМО желательно увеличение числа каналов обслуживания; но ведь работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание. Построение математической модели позволяет решить оптимизационную задачу о выборе рационального числа каналов с учетом влияния всех существенных факторов. Поэтому в задачах массового обслуживания обычно не выделяют какого-либо одного показателя эффективности, а сразу формулируют эти задачи как многокритериальные.

Схема гибели в размножения. Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показанный на рис. 4.12. Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний (S1, S2, ..., Sn1) связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний - правым и левым, а крайние состояния (S0, Sn) - только с одним соседним состоянием. Термин «схема гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.
Используется при моделировании документооборота в компании, задействовании станков в цеху.

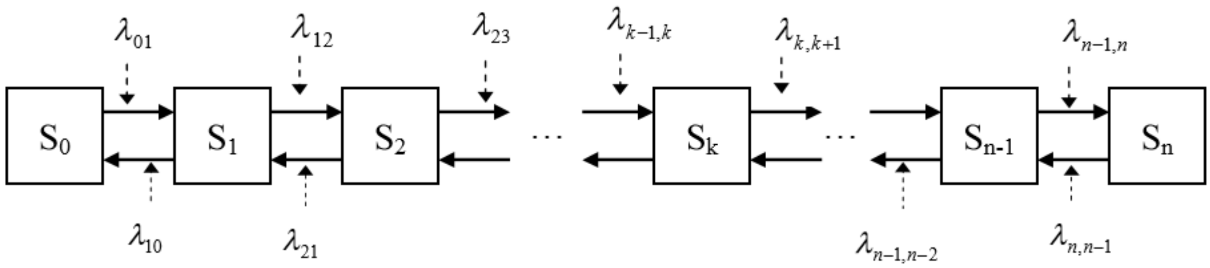


Рис. 4.12

Формула Литтла. Теперь выведем формулу, связывающую (для предельного, стационарного режима) среднее число заявок $L_{сист}$, находящихся в системе массового обслуживания (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), и среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист}$.

$$\boxed{W_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}}.$$

Для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок. Таким же образом выводится вторая формула Литтла, связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч}$ и среднее число заявок в очереди $L_{оч}$:

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}.$$

Классификация СМО:

<u>1. СМО с отказами:</u>

1.1. одноканальная СМО с отказами

1.2. многоканальная СМО с отказами (задача Эрланга)

Имеется п каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью K. Поток обслуживании имеет интенсивность λ (величина, обратная среднему времени обслуживания tоб). Найти финальные вероятности состояний СМО, а также следующие характеристики её эффективности:

A - абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q - относительную пропускную способность, т. е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

Ротк - вероятность отказа, т.е. вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной;

k - среднее число занятых каналов.

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

величину ρ «приведенной интенсивностью потока заявок». Смысл этой переменной - среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1};$$

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Вероятность отказа:

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 .$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 .$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Среднее количество занятых каналов:

$$\overline{k} = A / \mu$$

$$\overline{k} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

<u>2. СМО с неограниченной очередью</u>

- одноканальная СМО с неограниченной очередью

На практике довольно часто встречаются одноканальные СМО с очередью. В ТМО одноканальные СМО с очередью занимают особое место. Применительно к таким СМО получено большинство аналитических формул для немарковских систем. Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). На эту СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ; поток обслуживании имеет интенсивность μ, обратную среднему времени обслуживания заявки об t .

Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

Lсист - среднее число заявок в системе;

Wсист - среднее время пребывания заявки в системе;

Lоч - среднее число заявок в очереди;

Wоч - среднее время пребывания заявки в очереди;

Рзан - вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Что касается абсолютной А и относительной Q пропускной способности , то вычислять их нет надобности, поскольку очередь заявок неограниченна, и каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому А = λ, по той же причине Q = 1

- многоканальная СМО с неограниченной очередью

3. СМО с ограниченной очередью

- одноканальная

-многоканальная

- **Метод статистических испытаний**

Теоретические основания метода статистических испытаний.

Наибольшее распространение при исследовании сложных динамических систем получил ***метод статистических испытаний (МСИ)***. Его называют также ***методом Монте-Карло***. Метод статистических испытаний заключается в воспроизведении исследуемого физического процесса при помощи вероятностной ММ и в вычислении характеристик этого процесса. МСИ основан на многократном воспроизведении исследуемого процесса (проведении испытаний построенной математической модели) с последующей статистической обработкой полученных данных для получения характеристик рассматриваемого процесса в виде статистических оценок его параметров. Величина рассеивания этих параметров определяет степень приближения решения задачи в вероятностном смысле.

Теоретическую основу МСИ составляют базовые положения теории вероятностей и математической статистики.

1. Предельная теорема теории вероятностей. Когда случайная величина (результаты опыта) определяются суммой большого числа случайных величин (или факторов), то она подчиняется нормальному закону распределения (НЗР) вероятностей независимо от закона распределения слагаемых, если последние независимы.

2. Теорема Чебышева устанавливает связь между средним арифметическим конечного числа значений случайной величины и её математическим ожиданием. При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к её математическому ожиданию.

3. Теорема Бернулли устанавливает связь между частотой появления события и его вероятностью.

Метод статистических испытаний обладает следующими достоинствами:

- универсальность применения к любым динамическим системам (моделям), в том числе и стохастическим системам;
- относительно простая и гибкая вычислительная схема, удобная для алгоритмизации и программирования;
- устойчивость результата по отношению к возможным ошибкам при реализации отдельных опытов;
- наличие апробированной методики (алгоритмов) оценки точности получаемых результатов;
- универсальность метода, которая заключается в возможности использования для исследования нелинейных систем и процессов, для которых отсутствуют корректные аналитические описания;
- возможность сопряжения МСИ с другими методами вычислительной математики.

Сущность МСИ сводится к введению случайных реализаций входных случайных функций x_j (t) и/или f_j (t) на соответствующие входы исследуемой системы (или ее модели). На каждый из входов системы при одном испытании должна быть подана одна реализация входного возмущения, при этом будет получена реализация каждой из выходных координат. Многократно повторяя подобные испытания, получают для каждой из выходных координат совокупность реализаций. Затем путем статистической обработки полученных результатов определяют законы распределения выходных координат или отдельные характеристики этих законов. Для воспроизведения и ввода входных возмущений наряду с использованием реальных записей их реализаций применяется физическое или математическое моделирование случайных функций и параметров. С этой целью создано большое число разнообразных датчиков случайных функций и случайных величин, а также программ (датчиков) для получения на ЭВМ последовательности псевдослучайных чисел, на основе которых синтезируются реализации случайных функций. Очевидными достоинствами МСИ являются универсальность и простота.

Метод может быть использован применительно к любым нелинейным системам, причем сложность вычислительной схемы метода не зависит от сложности объекта исследования. Метод допускает использование не только математических моделей систем, но также и полунатурных моделей, содержащих отдельные блоки реальной системы. В принципе метод может быть реализован непосредственно на самой системе, если только технически возможны ввод случайных возмущений в систему и измерение её параметров. Для априорно известной (или ранее разработанной) ММ исследование системы на основе МСИ строится по типовой вычислительной схеме.

В табл. 4.1 и 4.2 приведены зависимости требуемого числа испытаний N от заданных доверительных вероятностей α_1 и α_2 и относительных отклонений ν_1 и ν_2. Относительные отклонения ν_1 и ν_2 определяют точность полученных результатов, а доверительные вероятности α_1 и α_2 - их надежность.

Таблица 4.1. Требуемое число испытаний для определения МОЖ

α_1 \ ν_1	**0,2**	**0,15**	**0,10**	**0,05**	**0,01**
0,5	18	31	70	231	7000
0,7	27	47	108	431	10800
0,8	41	73	164	651	16400
0,9	68	121	272	1090	27200

Таблица 4.2. Требуемое число испытаний для определения дисперсии

α_2 \ ν_2	**0,2**	**0,15**	**0,10**	**0,05**	**0,01**
0,5	37	63	141	563	14000
0,7	55	95	217	863	21600
0,8	83	147	239	1300	32800
0,9	137	243	545	2180	54400

Из таблиц видно, что с ростом требований точности и надежности результатов необходимое число испытаний резко возрастает. При этом повышение требований надежности ведет к менее быстрому росту необходимого числа испытаний, чем повышение требований к точности. Поэтому МСИ может быть практически использован только в тех случаях, когда требуется получить точность порядка (15…20)%. И лишь в единичных случаях, когда требуется получить высокую точность, можно применить этот метод при очень большом числе испытаний. Кроме того, следует учитывать, что с увеличением числа испытаний и в целом времени вычислений растут инструментальные ошибки, которые в некоторых случаях могут привести к нецелесообразности МСИ.

ТЕМА 7 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса
2. Анализ экономических показателей на основе межотраслевого баланса

1. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса

Межотраслевой баланс (**МОБ**, **модель «затраты–выпуск»**, **метод «затраты–выпуск»**) — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Теоретические основы межотраслевого баланса начал разрабатывать В. В. Леонтьев, учась в Берлинском университете[1]. Сокращенный перевод его оригинальной статьи под названием «*Баланс народного хозяйства СССР*» опубликовал журнал «Плановое хозяйство» в № 12 за 1925 год[2][3]. В этой работе Леонтьев показал, что коэффициенты, выражающие связи между отраслями экономики, достаточно стабильны и их можно прогнозировать[4].

В 1930-е годы Леонтьев применил метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры для исследования экономики США. Метод стал известен под названием «затраты — выпуск». Во время Второй мировой войны разработанная Леонтьевым матрица «затраты — выпуск» для экономики Германии служила для выбора целей ВВС США[5]. Аналогичный баланс для СССР, разработанный Леонтьевым, использовался властями США для принятия решения об объёмах и структуре ленд-лиза.

За 1959 год ЦСУ СССР силами отдела межотраслевого баланса под руководством М. Р. Эйдельмана разработало первый в мире отчетный межотраслевой баланс в натуральном выражении (по 157 продуктам) и отчетный межотраслевой баланс в стоимостном выражении (по 83 отраслям)[6]. Хотя последний из них и был частично опубликован в 1961 г.[7], полностью гриф секретности будет снят лишь в 2008 г.[8] Это не могло не оказать негативного влияния на развертывание прикладных работ в центральных плановых органах (Госплане и Госэкономсовете) и их научных организациях. Первые плановые межотраслевые балансы в стоимостном и натуральном выражении были построены в 1962 г. Далее работы были распространены на республики и регионы. По данным за 1966 г., наряду с отчетным межотраслевым балансом народного хозяйства СССР[9], балансы были построены по всем союзным республикам и экономическим районам РСФСР. Советскими учеными были созданы заделы для более широкого применения межотраслевых моделей (в том числе динамических, оптимизационных, натурально-стоимостных, межрегиональных и др.). В 1968 году за разработку плановых и отчётных межотраслевых балансов группе учёных (А. Н. Ефимову, Э. Б. Ершову, Ф. Н. Клоцвогу, С. С. Шаталину, Э. Ф. Баранову, Л. Е. Минцу, В. В. Коссову, Л. Я. Берри, М. Р. Эйдельману) была присуждена Государственная премия СССР, а А. Г. Гранбергу – премия Ленинского комсомола[10].

В 1970—1980-х годах в СССР на основе данных межотраслевых балансов разрабатывались более сложные межотраслевые модели и модельные комплексы, которые использовались в прогнозных расчетах и частично входили в технологию народнохозяйственного планирования:

Признавая, что по ряду направлений советские межотраслевые исследования занимали достойное место в мировой науке[12], Леонтьев отчетливо понимал, что теоретические разработки советских ученых не находят практического применения в реальной экономике, где все решения принимались исходя из политической конъюнктуры:

Первый в постсоветской России опыт формирования базовых таблиц «затраты—выпуск» уже по методологии СНС-93, но еще в ОКОНХ, относится к 1995 г., когда по настоянию Я. М. Уринсона Госкомстат России разработал их по 220 отраслям переходной экономики с высокой инфляцией. Подготовленный для публикации вариант по 110 отраслям так и не увидел свет из-за возражений Минобороны. На его базе для 1998—2006 гг. Госкомстатом и затем Росстатом публиковались краткие таблицы ресурсов и использования товаров и услуг (по 24 видам товаров и услуг).

К концу 2015 г. Росстат разработал и 30 марта 2017 г. впервые опубликовал детализированные базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2011 г. (таблицы ресурсов и использования для 178 отраслей и 248 продуктов, симметричные таблицы «затраты-выпуск» для 126 продуктов)[14] и таблицы ресурсов и использования за 2014 г. (для 59 отраслей и 59 продуктов)

Рассмотрим наиболее простой вариант межотраслевого баланса, которую называют моделью «затраты-выпуск». Анализ модели «затраты-выпуск» сводится к составлению и решению системы линейных алгебраических уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции. Пусть весь производственный сектор народного хозяйства подразделяется на «чистых отраслей». «Чистая отрасль» - это условное понятие – некоторая часть хозяйства, более или менее цельная, например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство. Пусть X_{ij}, - объём продукции отрасли i, расходуемый в отрасли j;

X_i - объём производства отрасли i за данный промежуток времени (так называемый валовый выпуск продукции i);

Y_i - объём потребления продукции отрасли в непроизводственной сфере (объём конечного потребления);

Z_j - условно чистая продукция, которая включает оплату труда, чистый доход и амортизацию. Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, килограммы, штуки и т. п.) или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевые балансы. Ниже будем рассматривать стоимостной баланс.

В табл. 3.1 представлена принципиальная схема межотраслевого баланса в стоимостном выражении. Рассматривая схему баланса по столбцам, можно заметить, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и её условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_i \,, \quad j = 1,\ldots,n\,.$$

Напомним, что величина условно чистой продукции j Z равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода отрасли j. Соотношение (3.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы. Рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, отметим, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих её продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \,, \quad i = 1,\ldots,n\,.$$

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	…	n		
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nn}	Y_n	X_n
Условно чистая продукция	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Формула (3.2) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования. Балансовый характер таблицы выражается в том, что

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j \,.$$

Коэффициенты прямых материальных затрат. Основу экономико-математической модели МОБ составляет технологическая матрица прямых затрат Aij. Коэффициент прямых материальных затрат a_{ij} показывает, сколько необходимо единиц продукции отрасли i для производства единицы продукции отрасли j, если учитывать только прямые затраты:

$$a_{ij} = x_{ij} / \hat{X}_j, \quad i, j = 1,\ldots, n.$$

Введём два важных предположения, необходимых для рассмотрения модели Леонтьева: 1) сложившуюся технологию производства считаем неизменной, тогда матрица $A = (a_{ij})$ постоянна; 2) постулируем свойство линейности существующих технологий – для выпуска отраслью j любого объёма продукции X_j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij} \cdot X_j$, т.е. материальные издержки пропорциональны объёму производимой продукции:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j. \qquad (3.4)$$

Подставляя выражение (3.4) в балансовое соотношение (3.2), получаем

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot X_i + Y_i, \qquad (3.5)$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y. \qquad (3.6)$$

С помощью этой модели можно выполнять три вида плановых расчётов:

а) задавая для каждой отрасли величины валовой продукции (X_j), можно определить объёмы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A) \cdot X; \qquad (3.7)$$

б) задавая величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y; \qquad (3.8)$$

в) задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объёмы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объёмы валовой продукции вторых.

В формулах (3.7) и (3.8) символ E обозначает единичную матрицу размера n, а выражение $(E - A)^{-1}$ - матрицу, обратную матрице $(E - A)$. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то су-

Пример Даны коэффициенты прямых затрат а $_{ij}$ и конечный продукт Y_i для трёхотраслевой экономической системы:

$$A = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{vmatrix}, \qquad Y = \begin{vmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{vmatrix}$$

Требуется определить:

1) коэффициенты полных затрат; вектор валового выпуска;

2) межотраслевые поставки продукции;

3) проверить продуктивность матрицы А ;

4) заполнить схему межотраслевого баланса.

Для решения задачи воспользуемся функциями электронных таблиц Excel. В табл. 3.2 приведены результаты расчётов по первым трём пунктам задачи.

Для вычисления обратной матрицы необходимо:

- выделить диапазон ячеек для размещения обратной матрицы;
- ввести диапазон ячеек, в которых содержится матрица (E - A);
- нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

В ячейки B6:D8 запишем элементы матрицы (E-A) . Массив (E-A) задан как диапазон ячеек. Выделим диапазон B10:D12 для размещения обратной матрицы B = $(E – A)^{-1}$ и введём формулу для вычислений МОБР (B6:D8). Затем следует нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER. Все элементы матрицы коэффициентов полных затрат B неотрицательны, следовательно, матрица А продуктивна.

2. Вычислим вектор валового выпуска X по формуле X = B*Y.

Для умножения матриц необходимо:

- выделить диапазон ячеек для размещения результата умножения матриц;
- выбрать функцию МУМНОЖ в категории Математические;
- ввести диапазоны ячеек, где содержатся матрицы B и Y;
- нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

В ячейки G10:G12 запишем элементы вектора конечного продукта Y. Выделим диапазон B15:B17 для размещения вектора валового выпуска X, вычисляемого по формуле $X = B \cdot Y$. Затем вводим формулу для вычислений МУМНОЖ (B10:D12, G10:G12). Далее нажимают клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

3. Межотраслевые поставки x_{ij} вычисляют по формуле $\mathbf{x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j}$.

4. Заполняют схему межотраслевого баланса

	A	B	C	D	E	F	
1							
2		0,3	0,1	0,4			

3	A	0,2	0,5	0			
4		0,3	0,1	0,2			
5							
6		0,7	-0,1	-0,4			
7	E-A	-0,2	0,5	0			
8		-0,3	-0,1	0,8			
9	1)						
10		2,040816	0,612245	1,020408163			200
	B	0,816327	2,244898	0,408163265	Y		100
		0,867347	0,510204	1,683673469			300
	2)						
		775,5102					
	X	510,2041					
		729,5918					
	3)						
		232,6531	51,02041	291,8367347			
	X	155,102	255,102	0			
		232,6531	51,02041	145,9183673			

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100	510,1
3	232,6	51,1	145,9	300	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600	
Валовый продукт	775,3	510,1	729,6		2015

2. Анализ экономических показателей на основе межотраслевого баланса

К числу важнейших аналитических возможностей балансового метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей. При этом исходной моделью служит отчётный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В отдельной строке баланса даётся распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции. Предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Пусть L_j - затраты живого труда в производстве продукта j, X_j - объём производства этого продукта (валовой выпуск). Тогда прямые затраты труда на единицу продукции вида j (коэффициент прямой трудоёмкости) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = 1,\ldots, n.$$

Введём понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществлённого труда, перенесённых на продукт через израсходованные средства производства. Обозначим величину полных затрат труда на единицу продукции вида j через T_j, тогда произведения вида $a_{ij} \cdot T_i$ будут отражать затраты овеществлённого труда, перенесённого на единицу продукта j через средство производства i. Будем предполагать, что коэффициенты прямых материальных затрат ij a выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу продукции вида j (коэффициент полной трудоёмкости) будут равны

$$\underline{T_j = \sum^{n} a_{ij} \cdot T_i + t_j; \quad j = 1,\ldots, n.}$$

Введём вектор-строку коэффициентов прямой трудоёмкости $t = (t_1, t_2, \ldots t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоёмкости $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Тогда с помощью матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A (в натуральном выражении) систему уравнений (3.10) можно переписать в матричном виде

$$T = T \cdot A + t$$

Выполнив очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы

E: $T - T \cdot A = T \cdot E - T \cdot A = T (E - A) = t$, получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоёмкости:

$$T = t \cdot (E - A)^{-1} \qquad (3.12)$$

Матрица $(E – A)^{-1}$ представляет собой матрицу коэффициентов полных материальных затрат - B, поэтому равенство (3.12) можно переписать в виде

$$T = t \cdot B \quad (3.13)$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учётом формулы (3.9) будет равна

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = \bar{t} \cdot \bar{X}.$$

Используя соотношения (3.9) , (3.13) и (3.14), приходим к следующему равенству:

$$t \cdot X = T \cdot Y$$

Здесь t и T – векторы-строки коэффициентов прямой и полной трудоемкости, а X и Y – векторы столбцы валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (3.15) представляет собой основное балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. Показатели полной трудоёмкости выявляют структуру затрат на выпуск различных видов продукции, и, прежде всего, соотношение между затратами живого и овеществлённого труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоёмкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематично эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерителях.

Пример 3.2 Пусть в дополнение к исходным данным примера 3.1 заданы в некоторых единицах измерения затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трёх отраслях: $L_1 = 1160$, $L_2 = 460$, $L_3 = 875$. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоёмкости и составить межотраслевой баланс затрат труда.

Решение.

1. Опираясь на формулу (3.9) и результаты примера 3.1, определяем коэффициенты прямой трудоёмкости:

$t_1 = 1160 / 775{,}3 = 1{,}5$; $t_2 = 460 / 510{,}1 = 0{,}9$; $t_3 = 875 / 729{,}6 = 1{,}2$

2. По формуле (3.13), где B - матрица коэффициента полных материальных затрат, вычисленная в примере 3.1, находим коэффициенты полной трудоёмкости:

$$T = (1{,}5;\ 0{,}9;\ 1{,}2) \times \begin{vmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}967 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{vmatrix} = (4{,}84;\ 3{,}55;\ 3{,}92)$$

3. Умножая строки 1-3 первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, построенного на примере 3.1, на соответствующие коэффициенты прямой трудоёмкости, получим искомую схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях). Результаты расчётов представлены в таблице

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Затраты трудоа на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы)
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

ТЕМА 8 МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Современные (логистические) технологии в области управления запасами, применяемые производителями направлены в основном на минимизацию материальных запасов. Примерами таких систем являются следующие методы:

- МРП (Materials Requirements Planing) – планирование потребности в материалах – система планирования производственных ресурсов.
- «Канбан» – метод, обеспечивающий оперативное регулирование количества произведенной продукции на каждой стадии поточного производства.
- «Джаст ин тайм» (Just-in-time) – «точно вовремя» – общий организационный подход, с помощью которого, в результате учитывающего детали спроса, точного управления, значительно сокращаются запасы и тем самым длительность производственного цикла.
- ОПТ – (Optimized Production Technologies) – оптимизированные производственные технологии.
- ДРП (Distribution Requirements Planing) – система управления и планирования распределения продукции.

Последние новшества в сфере производства таковы:

- дифференциация продукции на возможно более поздней стадии производства на базе использования максимально однотипных комплектующих;
- использование выгод массового производства не на стадии сборки, на стадии изготовления комплектующих изделий;
- стремление к максимальному удовлетворению потребностей клиента на этапе выбора товара для производства.

Все это требует гибкости производства на цеховом уровне, достигаемой как за счет расширения возможностей по переналадке оборудования, так и благодаря применению новых методов управления запасами - «Канбан» и «точно в срок».

Суть системы «Канбан» состоит в том, чтобы наличные запасы по своему количеству соответствовали потребностям начальной стадии производственного процесса, а не накапливались, как прежде. Одним из методов сокращения запасов, повышения гибкости производства и возможности противостояния возрастающей конкуренции стал метод «точно в срок», получивший наибольшее распространение в

США и странах Западной Европы. Сущность метода базируется на трех предпосылках. Во-первых, предполагается, что заявкам потребителей готовой продукции должны соответствовать не её предварительно накопленные запасы, а производственные мощности, готовые перерабатывать сырье и материалы, поступающие почти «с колес». Вследствие этого объем производственных запасов, квалифицируемый как замороженные мощности, минимизируется. Во-вторых, в условиях минимальных запасов необходима непрерывная рационализация организации и управления производством, ибо высокий объем запасов смягчает последствия от упущений в области менеджмента, нивелирует неиспользуемые производственные мощности, ненадежную работу поставщиков и посредников. В-третьих, для оценки эффективности производственного процесса, помимо уровня затрат и производительности фондов, следует учитывать срок реализации заявки, так называемую длительность полного производственного цикла. Короткие сроки реализации заявок облегчают управление предприятием и способствуют росту его конкурентоспособности благодаря возможности оперативного и гибкого реагирования на изменения внешних условий. В противоположность традиционным методам управления, при методе «точно в срок» централизованное планирование касается только последнего звена логистической цепи, т. е. склада готовой продукции. Все другие производственные и снабженческие единицы получают распоряжения непосредственно от звена, находящегося ближе к концу логистической цепи. К примеру, склад готовых изделий дал заявку (что равнозначно выдаче производственного задания) на определенное число изделий в монтажный цех, монтажный цех отдает распоряжение об изготовлении подузлов цехам обработки.

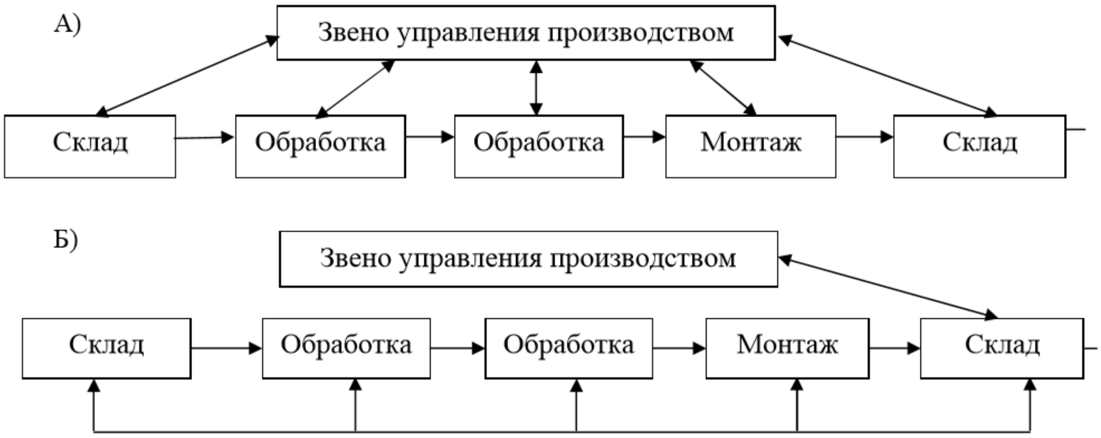


Рис. 3.1 - Схема управления производством: А - в традиционной системе; Б - в системе «точно в срок»

Это означает, что производственное задание всегда выдается потребителю, использующему (или обрабатывающему) данную деталь. Тем самым материалопоток от «источника» к «потребителю» предваряется потоком информации в обратном направлении, т. е. производству «точно в срок» предшествует информация «точно в срок». Практика показывает, что для эффективного внедрения стратегии «точно в срок» необходимо изменение способа мышления целого коллектива, занимающегося вопросами производства и сбыта. Традиционный стереотип мышления типа «чем больше, тем лучше» должен быть заменён схемой «чем меньше, тем лучше», если речь идет об уровне запасов, использовании производственных мощностей, продолжительности производственного цикла или о величине партии продукции. Результаты анализа, проведенного по внедрению концепции «точно в срок» на западноевропейских предприятиях, являются многообещающими.

Усредненные данные, полученные более чем на 100 обследованных объектах (отдельные проекты функционируют на фирмах непрерывно от 2 до 5 лет), таковы:

• запасы незавершенного производства сократились более чем на 80%;

• запасы готовой продукции снизились примерно на 33%;

• объем непроизводственных запасов (материалов и полученных по кооперации деталей) колебался от 4 часов до 2 дней по сравнению с 5-15 днями до внедрения метода «точно в срок»;

• продолжительность производственного цикла (срок реализации заданий всей логистической цепи) сократилась примерно на 40%;

• производственные издержки снизились на 10-20%;

• значительно повысилась гибкость производства.

Затраты, связанные с подготовкой и внедрением стратегии «точно в срок», относительно невелики и окупались, как правило, уже через несколько месяцев функционирования этой системы. Использование стратегии «точно в срок» дает и другие выгоды, в том числе неэкономического характера. Использование принципов системы «точно в срок» оказывает также положительное влияние на долгосрочную инвестиционную политику предприятия, которая в данном случае отдает предпочтение машинам и оборудованию, связанным с гибкой автоматизацией производственных, транспортных и контрольных процессов.

В течение последних 15 лет в промышленно развитых странах было разработано множество моделей, имеющих отношение к различным вопросам управления запасами. При помощи моделирования доказывается эффективность применяемых мер в процессе производства или выполнения производственной программы, поскольку могут быть измерены периоды прохождения продукта через всю технологическую линию. При помощи моделирования можно также проверить проекты гибких производственных участков, обслуживаемых автоматическими транспортными средствами, оценить затраты на материально-техническое снабжение производства. Проектирование складов с применением компьютера дает возможность получить информацию об их оптимальной системе, величине необходимых Капиталовложений и затратах на эксплуатацию складов.

Фирмы часто используют математические модели для выбора уровня запасов путем балансирования затрат на подготовительные операции или расходов на выполнение заказа и сопоставления затрат при дефиците запасов с затратами на их хранение. Затраты на хранение запасов включают в себя не только затраты на содержание пасов на складе, издержки вследствие порчи продукции и морального износа, но и упущенную выгоду, т. е. норму прибыли, которую можно было бы получить, используя другие возможности инвестирования при эквивалентном риске. Один из вариантов снижения риска при хранении запасов - использование технологий, основанных на внедрении систем гибкого производства, его роботизации. В данном случае преимуществом касается сокращение времени и затрат на подготовительные операций. Это делает экономически выгодным изготовление изделий небольшими партиями, что особенно важно в условиях жесткой конвенции и постоянных изменений требований рынка. При этом временно существенно снижается и риск морального устаревания запасов.

Название системы	Основные преимущества	Недостатки
MRP Manufacturing Recourse Planning, США	MRP Manufacturing Recourse Planning, США Снижение издержек производства за счет уменьшения складских заделов, сокращения сроков изготовления продукции и их	Непременное условие - точность исходных данных, что требует реорганизации информационных систем. Система не обеспечивает координированного учета множества требований,

	соблюдение. Размеры снижения запасов на складах составляют в среднем 20% и более.	поступающих извне, а поэтому не позволяет действительно объективно определить оптимальные размеры партий готовой продукции. В результате пропадает возможность достоверно оценивать степень эффективности принимаемых решений и реальные размеры экономии от принимаемых вариантов поставок и использования материальных ресурсов.
MAP-Material Availability Planning, США	Система реального обеспечения материальными ресурсами, т.к. материальное планирование осуществляется на базе дискретного потока данных относительно фактически поступающих заказов на поставку продукции. Процесс определения размеров партий и продуктовой структуры выпуска продукции приобретает динамичный характер и протекает под воздействием оценки главного фактора: величины затрат на материальные ресурсы, поступающих из внешних источников	Сильная зависимость от факторов внешнего окружения в частности поставки материальных ресурсов — их стоимости, сроков поставки, а также «перекрестного» воздействия множества факторов и требований, которые в системе MAP считаются неопределенными
Kanban - Канбан, Япония	Система оперативного планирования производственных запасов и материальных потоков между отдельными производственными операциями. Главное правило - межоперационная поставка исключительно доброкачественных бездефектных деталей и полуфабрикатов. Цель внедрения - исключить запасы и незавершенное производство, обеспечить большую гибкость производства, возможность приспособления к изменяющимся требованиям рынка.	План производства определенного количества деталей и полуфабрикатов на каждой предшествующей технологической стадии определяется заданием производственного участка, выполняющим последующую стадию при данной производственной программе предприятия. Канбан можно определить как вытягивающую (в отличие от MRP и MAP, которые являются подталкивающими) систему планирования, информация в которой идет от конечной точки непосредственного производства к предыдущему участку работы.
Just-in-time - «точно в срок», Япония	Сырье, полуфабрикаты, комплектующие подаются небольшими партиями непосредственно в нужные точки производственного процесса, минуя складские помещения; готовая продукция также отгружается потребителям непосредственно по мере завершения производства.	Необходимое условие - выравнивание производства, т.е. если для какого-либо процесса производства детали будут поступать в разные промежутки времени или неравными по количеству партиями, то на предшествующем этапе производства должно быть задействовано столько

	Основной принцип данной системы - выработка и поставка продукции точно в заданный срок и не ранее. В результате - сокращение производственных запасов и расстояний транспортировки.	оборудования и рабочей силы, чтобы можно было удовлетворить максимальный спрос. Реализация системы невозможна при централизованном планировании, необходимое условие - внедрение системы канбан

Далее рассмотрим систему управления запасами - планирование материальных потребностей (MRP), которая характеризуется зависимым спросом и используется для прогнозирования зависимого спроса. Изделие имеет зависимый спрос, если его использование прямо связано с планом производства др. изделий. Например, спрос на автомобили зимой зависит от выпуска шипованных шин, или спрос на лекарства зависит от эпидемии, спрос на хирургические инструменты зависит от частоты выполнения операций. Цель планирования материальных потребностей заключается в том, чтобы иметь в запасах только то, что непосредственно требуется для выполнения планов текущего производства. Система планирования материальных потребностей нуждается в информации трех видов. Для примера предположим, что производитель детских трехколесных велосипедов пользуется системой планирования материальных потребностей для управления запасами колес определенного размера. Предположим также, что анализ потребности в таких колесах проводится в конце февраля. При этом потребуются три вида исходных данных:

1. План производств велосипедов с колесами данного типа. Допустим, предприятие намерено произвести 1000 велосипедов в третью неделю апреля.

2. Спецификация материалов для велосипедов с указанием деталей и их количества, требующегося для сборки одного велосипеда. В нашем случае на каждый велосипед требуется три колеса.

3. Инвентаризационные данные по данной позиции с зависимым спросом.

В частности, необходимо знать:

🕐 количество, имеющееся в запасах на данный момент. Например, имеется 150 колес;

🕐 заказанное количество и ожидаемый срок получения заказа. Допустим, у поставщика заказано 1800 колес, ожидаемый срок прибытия заказа – вторая неделя марта;

🕐 время реализации заказа. Колеса обычно поступают через две недели после размещения заказа на поставку.

Анализ при планировании потребности проходит в три этапа:

1. Суммарная потребность (или позиция) рассчитывается на основе плана производства и спецификации материалов. В нашем случае в третьей неделе апреля потребуется 3000 колес (3 колеса на один велосипед * 1000 велосипедов).

2. Чистая потребность рассчитывается путем вычитания из показателя суммарной потребности количества, имеющегося в наличии, и заказанного количества со сроком поставки, отвечающим плану производства. Поскольку 150 колес имеется на складе и 1800 заказанных колес прибудут в марте, чистая потребность на третью неделю апреля составит 1050 колес (3000 1950).

3. С учетом сроков реализации заказов планируется время размещения заказа таким образом, чтобы удовлетворить чистую потребность к планируемой дате начала производства. Поскольку срок выполнения заказа на колеса составляет две недели, то заказ на 1050 колес должен быть размещен в первую неделю апреля.

В примере со сборкой велосипеда система планирования материальных потребностей достаточно проста.

Практическое использование и реализация системы планирования материальных потребностей в условиях производства, когда требуются сотни и даже тысячи различных наименований, представляет определенные трудности.

При планировании материальных потребностей используются три вида исходных данных: спецификация материалов (комплектующих), требующихся для изготовления продукции; инвентаризационные данные по этому виду материалов, включающие количество, имеющееся на данный момент, заказанное количество, ожидаемый срок получения и время реализации заказа.

Из вышесказанного следует, что управление запасами с зависимым спросом значительно проще и подчинено планам производства. Сложность может быть вызвана только широкой номенклатурой и ассортиментом запасов, которая решается при наличии информационной системы на предприятии.

Достоинством MRP является способность своевременно и точно осуществлять репланирование (во многом благодаря тому, что система компьютеризирована). Способность такой системы учитывать происходящие изменения известна под названием восстанавливающее MRP . Восстанавливающее MRP использует целую программу с представлением всех вычислений, позволяющих получить новый план чистых потребностей. Следует отметить, что внесение всех изменений не всегда целесообразно, так как частое внесение изменений приводит к нервозности в работе системы. Производственные менеджеры должны оценивать значимость и последствия изменения прежде чем вносить его в MRP

Основной целью работы MRP является производство такого количества, которое необходимо без хранения на складе и ожидания дальнейших заказов. Имеется множество путей определения размера партий изделий, деталей и узлов в MRP. Наиболее часто используются следующие методы размернообъемных расчетов.

• партия за партией – производится точно столько, сколько требуется, при этом заказы и хранения запасов равны, а затраты переналадок зависят от количества переналадок, что отражается в плане чистой потребности в материалах;

• размер экономического заказа – EOQ более предпочтительно использовать там, где существует относительно постоянный независимый спрос, не требующий изучения, такой подход усредняет спрос в пределах рассматриваемого временного горизонта;

• последовательное балансирование по отдельным периодам (PPB) – более динамичный подход к выравниванию затрат переналадки и хранения PPB использует дополнительную информацию с учетом представлений о величине запасов в будущем. PPB пытается сбалансировать затраты переналадки на основе данных о спросе. Ключевым здесь является понятие об отдельном экономичном периоде (EPP), который измеряется отношением затрат на переналадку к затратам на хранение. PPB будет стремиться к некоторому увеличению потребности так, чтобы число отдельных периодов аппроксимировало EPP.

• алгоритм Вагнера – Витина является моделью динамического программирования, добавляющей некоторую сложность в расчет размера партии. Эта модель предполагает наличие временного горизонта, за которым отсутствует дополнительная чистая потребность. Такая техника часто используется на практике, но она связана с большими интеллектуальными затратами и требует глубоких знаний в области программирования.

Следует отметить, что в реальности все размеры партий, рассчитанные на основе приведенных методов не точны, так как производственная система не в состоянии быстро реагировать на частые изменения. На практике наиболее эффективен метод партия за партией, так как размер партии может быть изменен с учетом множества различных ограничений. Этот метод обеспечивает наиболее экономичные результаты. Однако там, где затраты переналадки значительны и спрос более или менее постоянен, удовлетворительные результаты обеспечивают метод PPB, алгоритм Вагнера - Витина, а также EOQ техника.

Безусловно, система планирования запасов MRP , учитывающая зависимый спрос, дает множество преимуществ. К ним относятся:

- возможность поддерживать низкий уровень материальных запасов производства;
- возможность отслеживать материально-производственные потребности;
- возможность оценивать данные по материальным потребностям производства, полученные из конкретного контрольного графика производственного процесса;
- возможность распределения времени и сроков производства.

Более совершенной и развитой является система планирования потребности материалов с обратной связью, которая обеспечивает обратной связью производственное планирование и систему управления запасами. Система объединяет обратную связь план по мощности, производственный график и достаточно удаленное во времени планирование производства. Важную роль в планировании производства с обратной связью играют загрузочные рапорты, которые показывают потребности ресурсов для всех текущих назначений в соответствии с планом и ожидаемыми распоряжениями в каждом рабочем центре.

Система MRP с обратной связью позволяет планировщику перераспределить работу между временными периодами, чтобы сгладить загрузку или, по крайней мере, разбросать ее в пределах мощности. Затем можно перерасписать обработку всех элементов плана, определяющего чистую потребность. Существуют следующие тактики сглаживания загрузки и минимизации изменений времен длительности обработки:

1. Запараллеливание – перекрытие исполнения операций с различной полнотой перекрытия, которое понижает время обработки и основано на передаче отдельных единиц на следующую операцию, не ожидая окончания обработки всей партии на предыдущей операции.

2. Операционное расщепление предусматривает размещение партии на обработку на двух различных станках, выполняющих одну и ту же операцию. Это увеличивает суммарное время переналадки, но в результате израсходованное время уменьшается, поскольку обработку на каждом станке проходит только часть первоначальной партии.

3. Расщепление партии приводит к нарушению установленного порядка движения партии в соответствии с расписанием обработки по ходу технологического процесса.

Прогнозировать независимый спрос сложнее, чем зависимый. Для управления запасами с независимым спросом применяются две системы управления:

1. Система с фиксированным количеством заказа;

2. Система с фиксированным интервалом времени.

В системах с фиксированным количеством заказа постоянно контролируется уровень запасов. Когда количество падает ниже установленного уровня, выдается заказ на пополнение запасов. Заказывается всегда одно и то же количество. Таким образом, фиксированными величинами в этой системе является уровень, при котором повторяется заказ, и заказываемое количество. Системы с фиксированными количествами заказа являются наиболее приемлемыми для запасов со следующими характеристиками:

- высокая стоимость предметов снабжения;
- высокие издержки хранения материально-технических запасов;
- высокий уровень ущерба, возникающего в случае отсутствия запасов;
- скидка с цены в зависимости от заказываемого количества;
- относительно непредсказуемый или случайный характер спроса.

Привлекательность такой системы заказа заключается в простоте механизма ее действия. Главный недостаток применения системы состоит в том, что заказ производится без изучения ожидаемой потребности. Может сложиться такая ситуация, что еще долго после того, как сделан заказ, потребность в нем не возникнет, и в результате запас не потребляется. Или наоборот: спрос все возрастает и не может быть удовлетворен имеющимся в наличии запасом. Заказ с твердо установленным количеством заказанного применяется только в тех случаях, когда суммы затрат на запас плюс затраты на заказ должны быть минимальными.

Система с фиксированным количеством заказа требует соблюдения следующих правил контроля:

• заказывать следующую партию можно в том случае, когда количество наличного запаса достигнет нижней точки заказа;

• необходимо заказывать оптимальный объем партии заказа;

• критерием оптимизации становится минимум совокупных затрат на хранение запасов и повторение заказа. Данный критерий учитывает три фактора, влияющих не величину совокупных затрат:

а) используемая площадь складских помещений;

б) издержки на хранение запасов;

в) стоимость оформления заказа.

<u>В современной практике управления запасами на предприятиях активно используются различные модели с независимым спросом:</u>

- модель экономического (по количеству) заказа (EOQ);
- модель производственного (по количеству) заказа;
- модель заказа с резервным запасом;
- модель с дисконтируемым количеством;
- системы с фиксированным периодом (BQ системы).

Цель большинства моделей управления запасами – это минимизировать суммарные затраты и свести к минимуму отрицательные последствия при накоплении и дефиците.

К главным затратам на управление относятся затраты на размещение, пополнение и хранение, остальные затраты носят постоянный характер.

Основная модель управления заказами (EOQ) предусматривает ряд допущений, например,

- спрос известен и постоянен;
- время между размещением заказа и его исполнением известно и постоянно;
- заказ поступает полностью, т.е. одной партией и в одно время;

- понижение (дисконт) количества невозможно;
- изменяются только затраты на перезаказ или размещение заказа;
- дефицит запасов исключен, если заказ размещен вовремя.

Суть модели экономического заказа (EOQ) заключается в одноразовом пополнении запаса и нулевом времени исполнения заказа. Заказ удовлетворяется в тот момент, когда на него поступила заявка и прибывает одновременно полностью, т.е. уровень запаса совершает прыжок от 0 до Q. Пример. Предприятие при нулевом запасе на складе сделало заказ на 200 единиц комплектующих. Все комплектующие поступили одновременно и уровень запаса повысился от О до 200 ед. Так как спрос постоянен во времени, запас со склада убывает с постоянной скоростью, когда он снизится до О, выдается новый заказ. Такой процесс повторяется во времени постоянно. Схематически, (см. рис. 3.2)

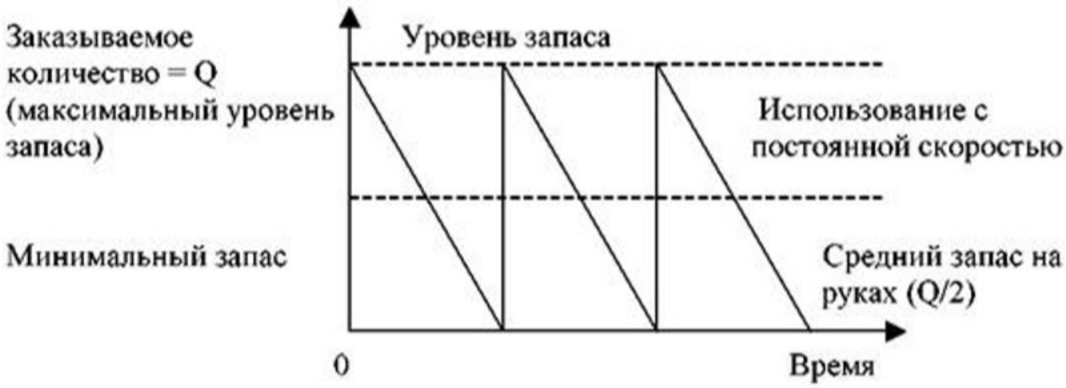


Рис. 3.2 - Модель экономического заказа

К достоинствам EOQ модели следует отнести ее надежность, так как она дает положительный результат даже при значительном изменении параметров. При этом следует отметить, что установление точной цены заказа и затрат хранения запасов часто затруднительно. Удобство этой модели также в том, что общие затраты изменяются незначительно.

После определения оптимальной величины заказа, необходимо определить, когда заказывать. Простые модели управления запасами исходят из того, что получение заказа должно быть немедленным, то есть заказывать нужно в тот момент, когда уровень запаса достигнет 0. Однако время между размещением и получением заказа, называемое временем выполнения заказа или временем доставки, может составлять как несколько часов, так и несколько месяцев. Таким образом, решение о том, когда заказывать, выражаемое термином точка перезаказа, определяется уровнем запаса, по достижении которого должен быть размещен заказ. Точка перезаказа (ROP) можно представить следующим равенством. ROP = (Дневная потребность) * (d - время выполнения нового заказа в днях).

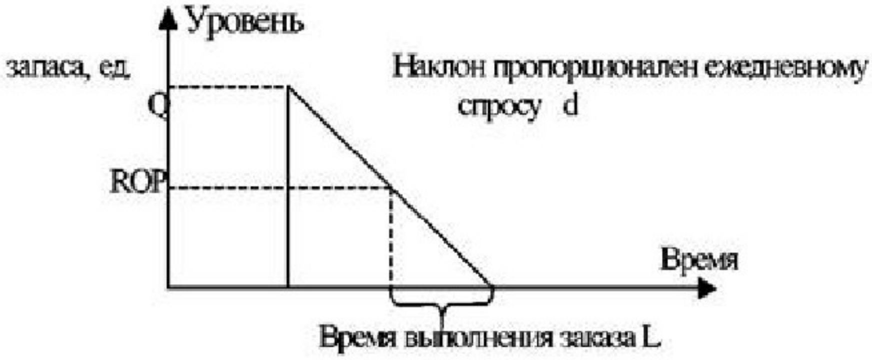


Рис. 3.3 - Точка перезаказа Уравнение для ROP означает, что спрос, однороден и постоянен. Ежедневный спрос d определяется отношением годового спроса (Д) деленного на число рабочих дней в году

$$d = \frac{Д}{T_{раб.дн.}}$$

Модель производственного (по количеству) заказа подходит для использования в производственном процессе, когда запасы наращиваются постепенно и показатель экономического уровня заказа уже предположительно установлен. Эта модель подтверждает, что оптимальная величина заказа Q обеспечена равенством затрат на заказ и хранение.

Модель заказа с резервным запасом применяется, когда на предприятии возрастает спрос на материалы и удается избежать их дефицита, используя страховой запас. Модели, отражающие такое состояние производства, называются моделями заказа с резервным запасом или моделями, планирующими нехватку запаса. На рис. 3.4 показан уровень запаса как функция времени. Чтобы увеличить объемы продаж, многие поставщики предлагают своим партнерам дисконтирование по количеству. Количественный дисконт (скидка) – это снижение цены единицы Р , когда товар покупается в больших количествах. Типичное расписание количественного дисконта представлено в табл.3.6

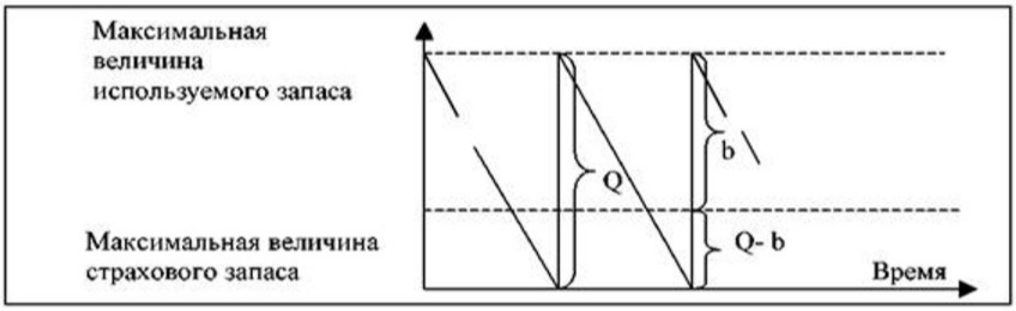


Рис. 3.4 - Модель заказа с резервным запасом

Но[illegible] дис[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] $
1	От 0 до 999	0	5
2	1 000 — 1 999	4	4,8
3	2 000 и выше	5	4,75

В рассмотренных выше моделях запасов основная цель заключалась в минимизации общих затрат. Поскольку стоимость единицы для третьего дисконта из таблицы является наименьшей, может появиться искушение сделать заказ в 2000 ед. или больше, чтобы сэкономить на понижении цены изделия. Однако при этом можно не достичь минимизации общих затрат на запасы, так как при увеличении количества заказа растут затраты на хранение. Наибольший эффект достигается, когда значение количественного дисконта рассматривается между понижающейся стоимостью продукта и увеличивающимися затратами на хранение. С включением затрат на приобретение продукта в расчет уравнение, определяющее общие годовые затраты примет вид:

$$TC = DS / Q + QH / 2 + PD$$

Здесь:

D - годовой спрос в единицах;

S - затраты заказа или переналадки;

P - цена единицы изделия;

H - затраты хранения единицы за год.

Затем определяется количество, которое будет соответствовать минимальным общим годовым затратам.

Рассмотрим следующий пример.

Предприятие пользуется дисконтными скидками для оптовых покупателей. Дисконтное расписание представлено в табл. 3.6. Затраты заказа составляют $ 49 на заказ, годовой спрос равен 5000 ед. товара, и текущие затраты запаса изменяются в проценте от стоимости I, который равен 20 %. Определим, какое заказываемое количество минимизирует общие затраты запаса.

1. Для каждого значения дисконта рассчитываем величину Q *, используя следующее уравнение Q* = sqr (2 · D · S / I · P). Здесь затраты хранения (H = IP) выражены в виде процента I от цены единицы продукта P вместо того, чтобы рассматривать их как постоянную величину, приходящуюся на единицу продукта в год H.

Q1* = sqr (2(5000)(49)/(0.2)/(5.00)) = 700 ед.

Q2* = sqr (2(5000)(49)/(0.2)/(4.80)) = 714 ед.

Q3* = sqr (2(5000)(49)/(0.2)/(4.75)) = 718 ед.

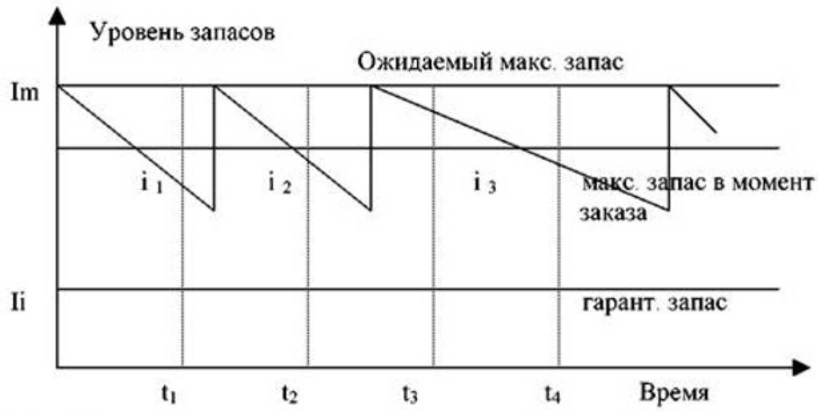
2. Для любого дисконта, если заказываемое количество слишком мало, чтобы быть дисконтированным, изменим заказываемое количество в сторону его увеличения до ближайшей минимальной величины, которую затем можно будет продисконтировать, Q1* находится между 0 и 999, поэтому оно не должно быть увеличено. Q2* находится ниже значений заказов, входящих в диапазон от 1000 до 1999, поэтому оно должно быть увеличено до 1000. То же можно сказать и о Q3*, оно должно быть увеличено до 2000. Если заказываемое количество меньше ранжируемого количества, соответствующего дисконтированию, то необходимо иметь ввиду, что ранжируемое количество при соответствующем ему дисконте обеспечивает и более низкие общие затраты.

3. Произведем расчет для всех заказываемых количеств, используя уравнения общих затрат. Результат представлен в табл. 3.7 .

Номер дисконта	Цена единицы, $	Заказываемое количество	Годовые затраты на товар,$	Годовые затраты на заказ, $	Годовые затраты хранения $	Общие затраты, $
1	5.00	700	25000	350	350	25 700
2	4.80	1000	24000	245	480	24 725
3	4.75	2000	23750	122.5	950	24 822.5

4. Отберем то Q *, которое соответствует самым низким общим затратам. Согласно данным табл. 3.7, это заказ, равный 1000 ед. Рассмотрим систему

управления запасами с независимым спросом с фиксированным интервалом времени, характеризующуюся тремя параметрами: Im максимальный ожидаемый запас; Ii максимальный запас в момент заказа на пополнение запаса; t период контроля запасов. Суть системы управления запасами с фиксированным интервалом времени заключается в том, что устанавливается некоторая промежуточная величина запаса Ii таким образом, если в контрольной точке (t1 , t2 , t3 , t4 и т. д.) имеющийся запас заключен между Ii и максимально ожидаемым запасом Im, то заказ не производится. Заказы производятся только тогда, когда запас равен или меньше Ii. (см. рис. 3.5).



i_1, i_2, i_3 - точка заказа

t_1, t_2, t_3, t_4 – моменты времени в которые производится контроль запасов.

Рис. 3.5 - Управление запасами с фиксированным интервалом времени

В результате использования такой системы можно ожидать уменьшения количества заказов очень малых размеров при одновременном появлении нескольких довольно больших заказов. Сумма дополнительных затрат (по сравнению с партией оптимального размера) в случае заказов большими партиями не столь велика, как в случае заказов малыми партиями. Вторая система (с фиксированным интервалом времени между заказами) предусматривает следующую последовательность операций подготовки заказа:

• устанавливается периодичность контроля запасов, ориентированная на график поставок поставщика;

• рассчитывается величина требуемых запасов как сумма количеств, продаваемых за период контроля запасов и за время ожидания поставки и количе ств в страховом запасе;

• составляется и выполняется график проведения контроля уровня запасов;

• принимается решение о размере заказа – указывается количество деталей;

• заказ высылается в установленный графиком день.

В системе с фиксированным интервалом времени заказы на восполнение размещаются с заданной периодичностью, например, один раз в две недели. Заказываемое количество непостоянно и зависит от имеющегося остатка.

Эта система более подходит для предметов материально-технического снабжения со следующими характеристиками:

• малоценные предметы;

• низкие затраты на хранение материально-технических запасов;

• незначительные издержки, если даже запасы закончились;

• один из многих предметов, закупаемых у одного и того же поставщика;

• скидка с цены зависит от стоимости заказов на несколько предметов. Системы с фиксированным интервалом времени применяются, например, при управлении запасами канцелярских товаров или бакалейных продуктов в магазине.

При системе с фиксированным интервалом времени между заказами устанавливаются строго определенные сроки представления заказа, тем самым решается вопрос когда? Сначала нужно ответить на вопрос сколько? Для этого устанавливается и фиксируется в карточках учета или памяти компьютера величина требуемого запаса для каждой детали. Наличный запас плюс ожидаемое пополнение по предыдущему заказу становятся достаточными для удовлетворения спроса до следующего пополнения запаса:

Требуемый запас = Количество, расходуемое за период контроля + Количество, расходуемое за период поставки + Страховой запас.

Из этого следует формула:

РЗ=ТЗ - (НЗ+ОП),

где

РЗ - размер заказа;

ТЗ - требуемый запас;

НЗ - наличный запас;

ОП - ожидаемое пополнение.

При работе по системе пополнения запасов через фиксированные интервалы времени ничто не препятствует использованию оптимальных заказов, особенно для деталей, имеющих стабильный спрос в период между поставками. Оптовики стараются точнее рассчитывать и своевременно корректировать величины требуемых запасов деталей – это способствует точности заказов и минимизации расходов по закупкам.

https://www.cfin.ru/management/manufact/inventory.shtml